

SÉRIE A, N° 420

N° D'ORDRE : 444

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

André BRODEAU

1^{re} THÈSE. — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *10 juillet* 1942, devant la Commission d'examen.

MM. BÉGHIN, *Président.*

FOCH
PÈRÈS } *Examineurs.*

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, rue de la Sorbonne

1942

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : **BRODEAU.**

Prénom : **André.**

Date de la soutenance :

Numéro d'ordre :

BRODEAU (André). — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement. — *Paris*, Hermann, éditeur, 1942, in-8°, 74 p.

Th. Doct. Univ. Sc. Paris, 1942, N°

BRODEAU (André). — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement. — *Paris*, Hermann, éditeur, 1942, in-8°, 74 p.

Th. Doct. Univ. Sc. Paris, 1942, N°

BRODEAU (André). — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement. — *Paris*, Hermann, éditeur, 1942, in-8°, 74 p.

Th. Doct. Univ. Sc. Paris, 1942, N°

BRODEAU (André). — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement. — *Paris*, Hermann, éditeur, 1942, in-8°, 74 p.

Th. Doct. Univ. Sc. Paris, 1942, N°

SÉRIE A, N° 420

N° D'ORDRE : 444

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

André BRODEAU

1^{re} THÈSE. — Poutres prismatiques minces. Flexion, torsion, aplatissement.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

1942, devant la Commission d'examen.

MM. BÉGHIN, *Président.*

FOCH

PÈRES

} *Examineurs.*

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, rue de la Sorbonne

1942

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires . . M. MOLLIARD.

M. CH. MAURAIN.

Doyen M. P. MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires

LÉON BRILLOUIN.
AUGER.
DANGEARD.
LESPIEAU.
VESSIOT.
PORTIER.
LAPICQUE.

G. BERTRAND.
CH. FABRY.
LÉON BERTRAND.
WINTREBERT.
DUBOSCQ.
BOHN.
RABAUD.

CAULLERY.
CARTAN.
E. BOREL.
A. COTTON.
J. DRACH.
M. GUICHARD.
LABROUSTE.

PROFESSEURS

Charles PÉREZ . . T Zoologie.
L. BLARINGHEM . T Botanique.
G. JULIA T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN . . . T Minéralogie.
A. DENJOY . . . T Géométrie supérieure.
L. LUTAUD . . . T Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT . . . T Physique.
E. DARMOIS . . T Enseignement de Physique.
A. DEBIERNÉ . . T Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR . . . T Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER . . . T Chimie physique.
M. JAVILLIER . . T Chimie biologique.
Henri VILLAT . . T Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB . . . T Géologie.
P. PASCAL . . . T Chimie générale.
M. FRÉCHET . . T Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON . . T Astronomie.
H. BÉGHIN . . . T Mécanique physique et expérimentale.
FOCH T Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . . Physique (P. C. B.).
De BROGLIE . . . T Théories physiques.
CHRÉTIEN . . . Optique appliquée.
PRENANT T Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY Mécanique physique et expérimentale.
COMBES T Physiologie végétale.
GARNIER T Application de l'analyse à la géométrie.
PÉRÈS Mécanique rationnelle.
HACKSPILL . . . T Chimie minérale.

TOUSSAINT . . . Technique Aéronautique.
M. CURIE Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD T Hautes températures.
CHAZY T Mécanique rationnelle.
GAULT Chimie (P. C. B.).
CROZE Recherches physiques.
DUPONT T Théories chimiques.
VALIRON T Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT Biologie animale (P. C. B.).
F. FERRIN Théories physiques.
YAVON T Chimie organique.
G. DARMOIS . . . Calcul des probabilités et Physique mathématique.
CHATTON T Biologie maritime.
AUBEL Chimie biologique.
J. BOURCART . . . Géographie physique et Géologie dynamique.
M^{me} JOLIOT-CURIE . Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . . Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES T Recherches physiques.
GRASSÉ T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
PRÉVOST Chimie organique.
BOULIGAND . . . Mathématiques.
CHAUDRON . . . Chimie (P. C. B.).
WYART Minéralogie.
TEISSIER Zoologie.
MANGENOT . . . Biologie végét. (P. C. B.).
P. AUGER Physique.
MONNIER Physiologie générale.
PIVETEAU Géologie.
ROCARD Physique.
H. CARTAN . . . Calcul différentiel.

Secrétaire A. PACAUD.
Secrétaire honoraire . . . D. TOMBECK.



Origine et but de nos recherches.

LES revêtements travaillants, tels qu'ils ont été employés en aéronautique, augmentaient sensiblement la résistance des ailes et des fuselages, mais seulement aux efforts de torsion et, parfois, aux efforts tranchants. La résistance à la flexion ne se trouvait nullement augmentée par la présence d'un revêtement dit travaillant. Celui-ci, constitué par du bois contreplaqué ou par des feuilles de métal, ne permettait pas au constructeur de supprimer la charpente classique, identique à celle qui existait lorsque les avions étaient simplement entoîlés. Chaque fois que l'on effectuait un essai statique d'un élément d'avion, on constatait que le revêtement flambait localement bien avant que les membrures aient atteint une déformation d'angereuse.

Ces constatations nous ont amené, d'abord à chercher ce qu'était le flambement local d'un revêtement, que nous avons assimilé à ce que nous appelons l'aplatissement ; nous avons pensé qu'un revêtement qui résiste aux forces d'aplatissement, provoquées par la flexion, permet à celle-ci d'être encaissée normalement par la pièce.

Ensuite nous avons cherché à construire des éléments d'avions constitués uniquement par un revêtement travaillant. Pour remplir ce rôle, le revêtement doit répondre à certaines conditions relatives, de poids, de résistance et de rigidité.

Aucun revêtement existant ne répondant aux conditions exigées, nous avons été amené à créer un matériau nouveau, constitué par deux feuilles de contreplaqué collées de part et d'autre d'une feuille de liège.

Les essais effectués sur ce matériau furent des plus encourageants et entraînèrent des applications industrielles dans l'aéronautique. Sur un rapport, des Services techniques du Ministère de l'Air, où tous les revêtements sont étudiés, notre matériau est qualifié : « le plus résistant des revêtements existants ».

Un autre avantage que procure la présence du liège consiste dans l'amortissement rapide des vibrations. Seuls, des essais ont été faits sur ce sujet que le calcul s'est montré impuissant à traiter.

Le liège, ainsi que l'avait montré accidentellement un de nos premiers essais statiques, semblait également donner aux ailes construites suivant notre procédé, une résistance au choc nettement plus grande, à résistances statiques égales, que celles des constructions ordinaires.

L'obligation dans laquelle on se trouve, en construction aéronautique, de déterminer par le calcul des dimensions de pièces qui sont ensuite soumises à des essais, nous a amené à rechercher des moyens de calcul pratiques des corps creux à revêtements travaillants. Nous avons étendu nos calculs aux profilés minces qui se rompent également d'une façon que fait prévoir notre théorie des forces d'aplatissement.



Les forces d'aplatissement en résistance des matériaux.

Si l'on pousse les essais de flexion d'une poutre creuse et mince jusqu'à la rupture, il se produit des phénomènes nettement différents de ceux observés dans le cas d'une poutre ordinaire. On voit le corps creux s'aplatir et prendre la forme d'un tuyau de caoutchouc fortement fléchi.

Cette sorte d'écrasement du tube est provoquée par des contraintes dites d'aplatissement, que nous allons définir, et qui existent chaque fois qu'il y a déformation par flexion.

D'autre part, remarquons que toutes les expériences qu'il est possible de faire montrent que, pour une fatigue suffisamment faible, inférieure à la limite élastique, la flèche de flexion d'une poutre creuse est la même que celle obtenue avec une poutre de section pleine, de même matière et de même moment d'inertie.

Nous admettrons donc que, dans le cas d'une poutre creuse et mince, et pour des fatigues peu élevées, si I désigne le moment d'inertie d'une section par rapport à l'axe de flexion, si E est le coefficient d'élasticité du matériau, M le moment fléchissant, la courbure $1/\rho$ est donnée par l'expression :

$$1/\rho = \frac{M}{EI} \sin \delta$$

δ étant l'angle de l'axe de flexion avec le plan perpendiculaire à l'axe du couple.

Nous admettrons également que la fatigue n , en un point situé à la distance v de l'axe de flexion, est donnée par l'expression :

$$n = \frac{Mv \sin \delta}{I}$$

Forces d'aplatissement d'une poutre prismatique de section quelconque.

Considérons une poutre, initialement rectiligne, encastrée à une extrémité et recevant à l'autre extrémité l'action d'un couple d'axe perpendiculaire au plan de la figure.

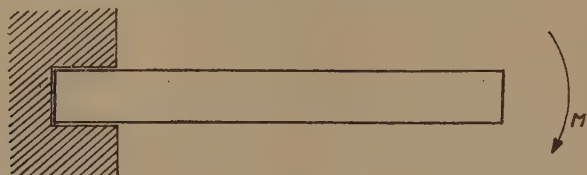


FIG. 1.

Sous l'action de ce couple, la poutre prend une courbure $1/\rho$, telle que $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, ρ étant très grand, nous négligeons bien entendu les différences de courbure qui existent entre les différentes fibres.

Considérons un élément de fibre, $a b c d$, de longueur ds et de section $d\Omega$. Soit $d\varphi$ l'angle de $a b$ avec $c d$ dans la poutre fléchie.

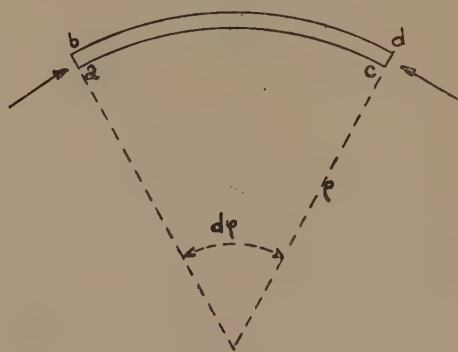


FIG. 2.

Comme nous sommes dans le cas de la flexion pure, la fatigue en $a b$ est la même qu'en $c d$. Soit n cette fatigue. La force qui s'exerce sur chaque extrémité de l'élément de fibre, est égale à $n d\Omega$.

Projetons chacune de ces forces sur la bissectrice de l'angle $d\varphi$, la somme de ces deux projections est égale à :

$$n d\Omega d\varphi$$

comme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds},$$

nous pouvons écrire :

$$nd\Omega \, d\varphi = \frac{n}{\rho} \, d\Omega \, ds.$$

Cette composante $\frac{n}{\rho} \, d\Omega \, ds$ des deux forces $nd\Omega$ est appelée par définition la force d'aplatissement relative à l'élément de fibre.

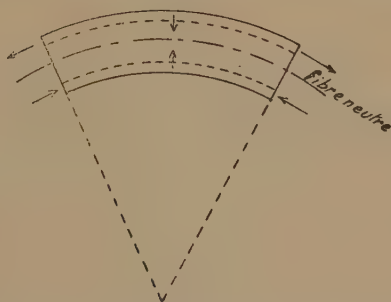


FIG. 3.

L'expression $\frac{n}{\rho}$ est par définition la force unitaire d'aplatissement.

Le croquis ci-dessus nous montre que la force d'aplatissement est toujours dirigée vers la fibre neutre, d'où son nom de force d'aplatissement.

Par la suite, nous désignerons la force unitaire d'aplatissement par le symbole fa .

On peut donner une autre forme à fa .

En effet, nous savons que l'on a :

$$n = \frac{Mv \sin \delta}{I}$$

et

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M \sin \delta}{EI}$$

par conséquent :

$$fa = \frac{n}{\rho} = \frac{M^2 v \sin^2 \delta}{EI^2}.$$

Afin d'avoir une idée concrète du phénomène d'aplatissement, examinons le cas d'une poutre caisson en bois de forme classique,

analogue à un longeron d'aile d'avion. Nous allons montrer que, pour une telle poutre, il n'y a pas à craindre, pour les âmes, l'effet des forces d'aplatissement.

L'aplatissement total, relatif à une semelle est donné par l'expression :

$$Fa = \iint fa \, d\Omega$$

l'intégration étant étendue à la section entière d'une semelle.

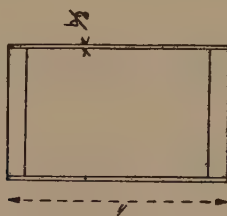


FIG. 4.

On peut écrire :

$$Fa = \frac{M^2}{EI^2} \iint v \, d\Omega$$

posons :

$$\mu = \iint v \, d\Omega$$

on voit que μ est le moment statique de la semelle par rapport à l'axe de flexion. On peut donc mettre Fa sous la forme :

$$Fa = \frac{M^2}{I^2} \frac{\mu}{E}.$$

D'autre part, n étant la fatigue maximum, on a :

$$\frac{M}{I} = \frac{n}{\frac{h}{2}}$$

et

$$\mu < \frac{Sh}{2},$$

S étant la section d'une semelle.

n peut donc écrire :

$$Fa < \frac{n^2}{h^2} \cdot \frac{Sh}{2E} \cdot \frac{1}{4}$$

et

$$Fa < \frac{n^2}{E} \cdot \frac{2S}{h}$$

Supposons, ce qui est courant, que l'on ait :

$$n = 200 \text{ kg. cm}^2, E = 100.000, \frac{2S}{bh} = 5$$

on a alors :

$$\frac{Fa}{b} < \frac{200^2}{100.000} \cdot 5$$

c'est-à-dire :

$$\frac{Fa}{b} < 2 \text{ kgr. cm}^2$$

Cette fatigue est donc négligeable, aussi bien pour le bois que pour la colle servant à relier les âmes aux semelles. Dans le cas d'une poutre caisson très large, l'aplatissement donnera très difficilement des fatigues dangereuses pour les âmes, mais les semelles pourront fléchir transversalement de façon à amener leur rupture. Effectivement, si l'on soumet à la flexion une poutre analogue à la poutre ci-dessous, on constate que les semelles se creusent conformément aux croquis.

L'une ou l'autre forme est obtenue suivant la rigidité de la

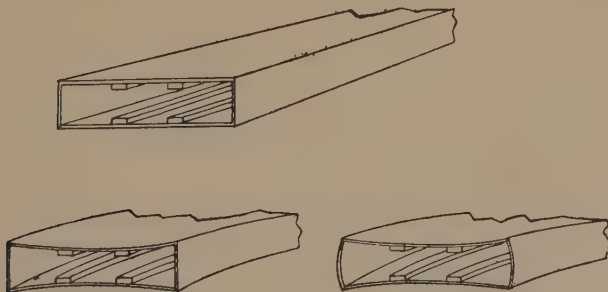


FIG. 5.

liaison âme-semelle. Un exemple de poutre creuse subissant des aplatissements sensibles est fourni par le tube métallique enroulé en spirale du baromètre ou manomètre. Une augmentation de la pression atmosphérique correspond à un écrasement du tube, donc à une augmentation de sa courbure.

Une diminution de la pression atmosphérique diminue l'aplatissement, donc également la courbure.

A la vérité, les forces d'aplatissement exercées par l'air ne sont pas identiques aux forces d'aplatissement que nous avons calculées, mais les deux phénomènes sont de même nature.

Les forces d'aplatissement en élasticité.

Notations et conventions.

Avant d'étudier le phénomène d'aplatissement en élasticité, nous indiquerons brièvement les notations et conventions que nous adopterons dans la suite. Nous considérerons une poutre droite de section rectangulaire et disposée par rapport à trois axes de coordonnées ox , oy , oz , conformément à notre dessin.

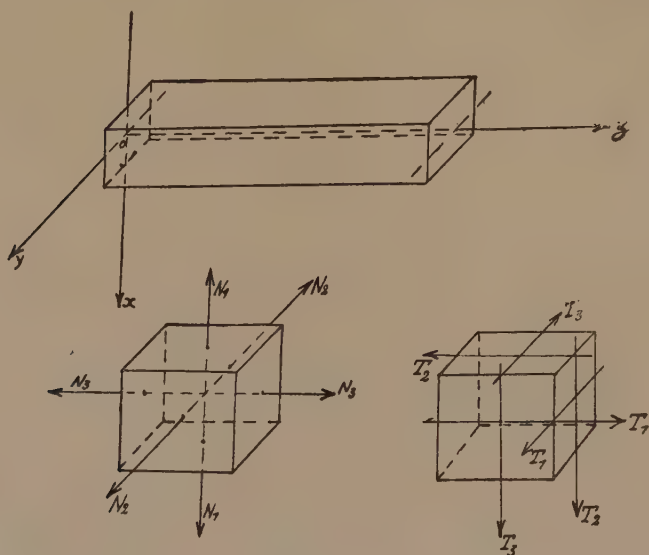


FIG. 6.

Représentons un cube élémentaire et les composantes normales et tangentielles relatives à chaque face.

Nous considérerons les tensions comme positives et les pressions comme négatives.

Un point M de coordonnées x, y, z avant déformation a pour coordonnées après déformation :

$$x + u, y + v, z + w,$$

Nous poserons :

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \text{Div } (u, v, w)$$

Dans les conditions indiquées ci-dessus, l'étude classique d'un corps homogène et isotrope nous fournit les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \lambda \theta + 2 \mu \frac{du}{dx} \\ N_2 = \lambda \theta + 2 \mu \frac{dv}{dy} \\ N_3 = \lambda \theta + 2 \mu \frac{dw}{dz} \\ T_1 = \mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ T_2 = \mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\ T_3 = \mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \end{array} \right.$$

les deux coefficients λ et μ étant de la nature d'une pression.

Les formules précédentes permettent d'écrire les formules de MAXWELL :

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$$

$$N_1 - N_2 = 2\mu \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right)$$

Théorie de Saint-Venant (Flexion simple).

SAINT-VENANT cherche une déformation telle que les fibres initialement parallèles aOz , puis déformées par la flexion, n'exercent latéralement les unes sur les autres aucune action. SAINT-VENANT pose que les déplacements u, v, w , qui satisfont aux conditions ci-dessus, sont :

$$u = a(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2)$$

$$v = 2a \sigma xy$$

$$w = -2axz$$

a étant une constante et σ le coefficient de POISSON

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Posons :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

On a :

$$\sigma = \frac{E}{2\mu} - 1$$

Substituons les valeurs de u , v , w , dans les formules donnant les N , T , et θ , et tenons compte des expressions donnant σ et E , on a après un calcul facile :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 2ax(2\sigma - 1) \\ N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = T_3 = 0 \\ N_3 = -2aEx \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, les fibres en lesquelles on peut décomposer la poutre n'exercent latéralement les unes sur les autres aucune action.

On vérifie facilement que les sections droites restent planes et normales au plan de flexion et passent par le centre de courbure de la fibre neutre. La courbure $1/\rho$ est telle que $1/\rho = 2a$.

La fatigue en un point d'abscisse x est égale à :

$$E \cdot \frac{x}{\rho}.$$

Incompatibilité de l'existence des forces d'aplatissement et des résultats obtenus par Saint-Venant.

Lorsque nous avons défini les forces d'aplatissement, nous n'avons pas cherché quelles étaient les forces qui les équilibraient. Il est évident qu'il doit au moins exister une force admettant une composante normale à l'élément de fibre, ce qui est incompatible avec les conclusions de SAINT-VENANT qui trouve :

$$N_1 = N_2 = T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Dans le cas de la poutre de section rectangulaire que nous

avons envisagée, il est facile de réaliser une expérience montrant l'existence d'une composante N_1 .

Prenons deux poutres identiques, mais constituées l'une par une série de lames et l'autre par une barre de métal.



FIG. 7.

Dans le cas de la flexion simple, les deux poutres semblent se déformer de la même façon, ce qui correspond à la nullité de T_2 .

Si les lames sont huilées, de façon à diminuer les frottements, la courbure ne semble pas varier, ce qui confirme le fait que $T_2 = 0$.

Cette interposition d'huile entre les lames fait cependant apparaître un phénomène que ne fait pas prévoir la théorie classique : l'huile suinte de chaque côté des lames et elle suinte d'autant plus que l'ensemble présente une courbure plus importante.

Il existe donc entre les lames des actions incompatibles avec la nullité de N_1 .

Puisque N_1 est différent de zéro, comment se fait-il que la théorie de l'élasticité nous donne : $N_1 = 0$.

Pour comprendre pourquoi la théorie de l'élasticité ne peut pas faire apparaître les forces d'aplatissement, il suffit de se reporter aux relations reliant les N et les T aux déformations.

On a supposé petits les déplacements et petites leurs variations quand on passe d'un point à un point voisin.

Le point de coordonnées x, y, z , est quelconque à l'intérieur de la poutre, donc les expressions

$$\begin{aligned} z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2 \\ \sigma x y \\ x z \end{aligned}$$

ne sont pas forcément petites. Par suite le coefficient a des expressions de SAINT-VENANT est forcément petit puisque u, v, w doivent être petits. Le calcul montre d'ailleurs que l'on a :

$$2a = 1/\rho$$

ρ étant le rayon de courbure de la poutre déformée.

Les N et T calculés par SAINT-VENANT étant des fonctions linéaires des dérivées partielles premières des déformations u , v , w , le coefficient a d'après la forme des équations (1) est forcément en facteur et au premier degré dans les expressions des N et T . Donc les N et T que l'on peut calculer par la méthode classique sont des infiniment petits du même ordre que a .

S'il y a des fatigues d'ordre supérieur au premier par rapport à a , il sera donc impossible de les mettre en évidence par le calcul habituel.

La force unitaire d'aplatissement étant égale à :

$$\frac{N_3}{\rho} = -4a^2Fx,$$

la plus grande fatigue de compression qui peut en résulter sera obtenue sur la nappe neutre en supposant que cette force d'aplatissement n'est équilibrée que par N_2 . La valeur maximum de N_2 est donc donnée par :

$$N_{2\max} = \int_0^h \frac{N_3}{\rho} dx$$

h étant la demi-hauteur de la poutre

$$N_{2\max} = \int_0^h -4a^2Ex dx = -2a^2Eh^2$$

et

$$N_2 = -2a^2E(h^2 - x^2)$$

$N_{2\max}$ et N_2 sont donc des infiniment petits du deuxième ordre par rapport à a .

Cette fatigue ne peut donc pas apparaître dans le calcul classique des fatigues. Si l'on exprimait les N et T en fonction linéaire, non seulement des dérivées partielles premières, mais aussi de leurs produits deux à deux, on pourrait avoir des termes du deuxième ordre par rapport à a et du deuxième degré par rapport à x .

Par exemple :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2a \sigma x$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2a x$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -4a^2 \sigma x^2$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = 4a^2 x^2.$$

Ces deux termes sont des infiniment petits du 2^e ordre.

Pour avoir des fatigues de cet ordre et de ce degré, il faudrait

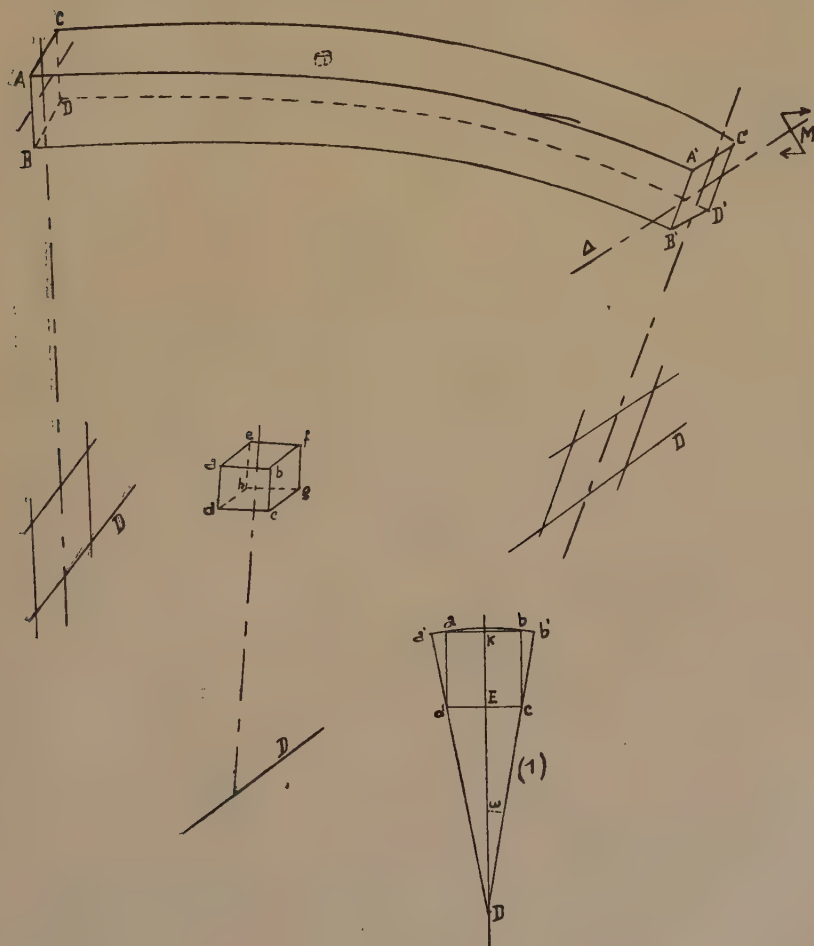


FIG. 7 bis.

donc compléter l'expression initiale des N et T en fonction des dérivées de u , v , w . Les expressions réduites des N et T ne seraient pas les expressions habituelles, mais devraient s'y ramener si l'on négligeait les fatigues d'ordre supérieur au premier.

Il n'est pas évident que, dans le cas général, le nombre des coefficients distincts se ramènerait à 2. Il est certain que les calculs auxquels on serait conduit seraient rapidement inextricables. Il est beaucoup plus simple de procéder comme nous l'avons fait.

Essayons de voir comment, en tenant compte de fa , peut être réalisé l'équilibre du cube élémentaire envisagé en élasticité. Restons dans le cas de la flexion simple. Considérons un petit cube dont un plan de symétrie coïncide avec une section droite de la poutre. Soit $a b c d e f g h$ ce cube. Projetons-le sur le plan de flexion, on obtient $a b c d$. Soit D le centre de courbure. Décrivons de D comme centre le cercle passant par a et b . On obtient b' et a' par intersection avec De et Dd .

D'après la théorie de l'élasticité, la petite surface figurée par cb' sur la figure (1) reçoit un effort normal égal à ndx^2 , n désignant la fatigue et dx mesurant l'arête du cube.

Le plan cb' est par définition un plan principal. Ce plan n'étant pas perpendiculaire au plan de la face $b c f g$, cette face du cube ne peut pas être dans un plan principal. Par suite la face $b c f g$ est soumise à une force admettant une composante tangentielle. Il en est de même pour la face $a d h e$. Les forces qui s'exercent sur les faces $b c f g$ et $a d h e$ peuvent être équilibrées de trois façons différentes :

- 1° Par des forces sur $a b f e$ et $c d g h$.
- 2° Par des forces sur $a b c d$ et $a e f g$.
- 3° Par des forces sur l'ensemble des quatre faces énumérées ci-dessus.

Dans le cas le plus général, il est impossible de dire comment a lieu l'équilibre du cube élémentaire.

Si la poutre est de section rectangulaire, comme la poutre que nous avons considérée, on peut admettre que seuls les efforts relatifs aux faces $a b e f$ et $c d h g$ équilibrent les forces tangentielles des faces $b c f g$ et $a d e h$.

Lorsqu'il n'y a pas de raison de symétrie qui intervient, il est impossible de déterminer les fatigues qui proviennent des forces fa .

Nous verrons que, pratiquement, chaque fois que les fa donneront naissance à des fatigues dangereuses, il sera possible de calculer celles-ci de façon satisfaisante.

Si on considère un cube $a b c d e f g h$ identique au petit cube que nous avons étudié et placé dans une pile de cubes telle que les cubes extrêmes limitent un élément de poutre situé entièrement d'un même côté de la fibre neutre, on voit que les faces semblables à $a b c d$ sont nécessairement soumises à des efforts.

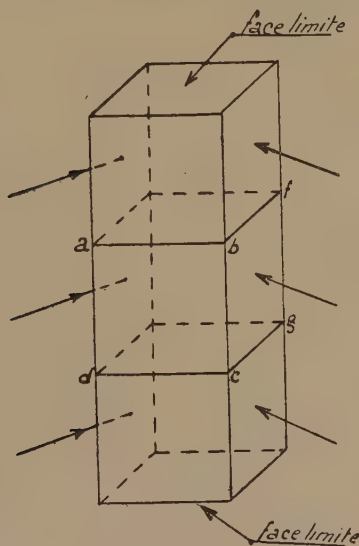


FIG. 8.

L'exemple précédent se trouve réalisé par une poutre en double té dans laquelle l'axe de flexion est parallèle aux semelles.



FIG. 9.

Une pile de cubes analogue à celle que nous venons d'examiner peut être prélevée dans une semelle, comme l'indique le pointillé.

Un corps creux nous donne exactement la même chose.

Si l'on voulait étudier les forces f_a et les forces qui les équilibrent en employant une méthode calquée sur la méthode classique, on serait conduit à des calculs rapidement inextricables. En effet, il faudrait commencer par écrire que les N et les T sont fonctions de u, v, w , des dérivées premières et des dérivées

secondes. La réduction du nombre des coefficients distincts ne nous permettrait pas d'envisager seulement les coefficients λ et μ habituels, d'autres coefficients distincts interviendraient. Pour avoir les N et les T correspondant à une certaine déformation, il



FIG. 10.

faudrait mettre celle-ci en équation comme dans l'étude classique d'un problème d'élasticité.

L'expérience ne montrant l'intervention des forces fa que dans le cas où les poutres sont creuses et minces ou simplement minces, nous limiterons notre étude aux cas particuliers qui sont seuls intéressants en pratique.



Flexion, cisaillement, torsion.

La notion de force d'aplatissement s'étant introduite dans notre étude comme une conséquence des phénomènes de flexion, nous allons faire une étude générale de la flexion, et du cisaillement qui l'accompagne généralement. Puis du cisaillement, nous déduirons la notion de centre de torsion, si importante dans l'étude des vibrations des éléments d'avions.

Flexion. — Considérons l'ensemble de deux poutres droites identiques, parallèles, mais placées de telle sorte qu'elles occupent des positions définies par la coupe ci-dessous représentant une



FIG. 11.

section droite. Ce système de deux poutres permet d'encaisser un couple d'axe parallèle aux poutres, uniquement par flexion

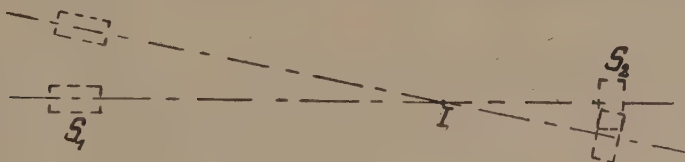


FIG. 12.

des poutres. La déformation se fera suivant le croquis ci-dessous :

Si le moment d'inertie de S_2 est le double de celui de S_1 , la



FIG. 13.

flèche de S_1 sera le double de la flèche de S_2 et le point I sera deux fois plus près de S_2 que de S_1 .

On conçoit fort bien que si les deux poutres S_1 et S_2 sont

reliées par une âme mince, conformément à notre croquis, le phénomène est presque identique au précédent.

Sous l'effet de la torsion, il y aura une petite torsion de chaque poutre, mais si celles-ci sont minces, c'est leur flexion qui demeure le phénomène le plus important.



FIG. 14.

On peut passer de cette poutre à la poutre *A* par déformation continue.



FIG. 15.

Cette poutre *A* peut également par déformation continue donner une poutre dans le genre de *B*.

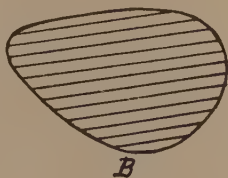


FIG. 16.

Puisque le centre de torsion de l'ensemble S_1S_2 ne coïncide pas avec son centre de gravité, il est évident qu'il doit en être de même pour la poutre de section irrégulière *B*.

Nous allons établir d'une façon rigoureuse dans le cas des

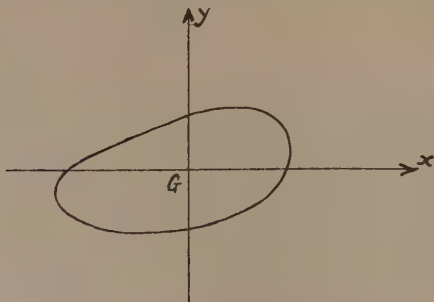


FIG. 17.

poutres minces ce qui nous semble évident d'après l'examen des exemples précédents.

Considérons une section droite d'une poutre prismatique. Soit G le centre de gravité de cette section et Gx l'axe de flexion.

Soit Gy un axe perpendiculaire à Gx .

Nous allons chercher d'abord quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire le couple agissant sur la poutre pour que Gx soit axe de flexion.

Soit M un point de coordonnées (x, y) appartenant à la section.

Soit ω l'angle de rotation de la section par rapport à la section distante de l'unité. Le raccourcissement au point M d'un élément de fibre de longueur ds est égal à :

$$\omega y ds$$

L'effort, ou fatigue unitaire correspondant à ce raccourcissement est $n_y = \frac{E\omega y ds}{ds} = E\omega y$

Si ρ est le rayon de courbure de la ligne moyenne,

$$\rho = \frac{1}{\omega}$$

ρ est supposé assez grand pour pouvoir être considéré comme constant en fonction de y .

On peut écrire

$$n_y = \frac{Ey}{\rho}$$

La poutre n'étant ni comprimée ni tendue, on a :

$$\iint n_y dx dy = 0$$

En tenant compte de la relation $n_y = \frac{Ey}{\rho}$ l'intégrale double s'écrit :

$$\iint \frac{E}{\rho} y dx dy = \frac{E}{\rho} \iint y dx dy = 0$$

car Gx passe par le centre de gravité G , et l'intégration est étendue à la totalité de la section droite.

Menons un axe quelconque GY par G , faisant un angle arbitraire α avec Gx .

Soit GX confondu avec Gx .

On a alors deux systèmes d'axes de coordonnées : ox, oy et OX, OY .

Soit d la distance de M à GY , on a :

$$d = X \sin \alpha$$

$$y = Y \sin \alpha$$

d'où

$$d \cdot n_y = X \sin \alpha \cdot \frac{E}{\rho} y = \frac{E}{\rho} XY \sin^2 \alpha$$

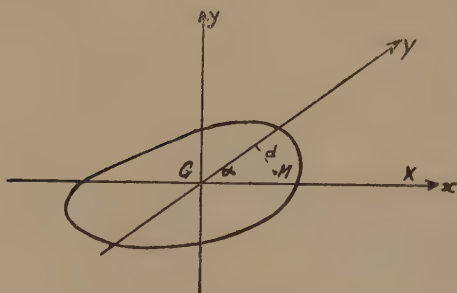


FIG. 18.

Le moment des forces $n_y dx dy$ par rapport à l'axe GY s'exprime par l'intégrale :

$$\sin^2 \alpha \frac{E}{\rho} \iint XY dx dy \text{ étendue à toute la section}$$

or

$$\iint XY dx dy = 0$$

si OX , OY sont deux diamètres conjugués de l'ellipse centrale d'inertie.

Ce moment sera nul si l'axe du couple est perpendiculaire à GY .

Si le couple provient du moment d'une force appliquée en un point de la poutre, il existe alors un effort tranchant et la réduction des forces devra donner un effort tranchant parallèle à GY et *non pas forcément confondu avec GY* . Habituellement, on dit que le plan des forces passe par GY , nous voyons que cela n'est pas évident. Nous montrerons de plus, rigoureusement pour un corps creux et mince que cela n'est pas exact, sauf dans des cas particuliers.

Pour simplifier, supposons qu'on applique une force à l'extrémité d'une poutre. Pour qu'il y ait flexion avec GX comme axe de flexion nous savons déjà que la force doit être parallèle à GY .

Considérons toutes les forces élémentaires $n_y dx dy$, perpendi-

culaires au plan de la section droite et cherchons directement la résultante de toutes les compressions d'une part et de toutes les tensions d'autre part.

Soit la Ω_1 partie tendue par exemple et Ω_2 la partie comprimée.

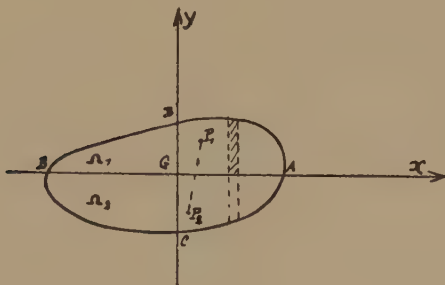


FIG. 19.

Soit $y = f(x)$ l'équation du contour.

La force agissant sur le rectangle élémentaire de base dx et de hauteur y est égale à :

$$\frac{My}{I} \cdot \frac{y}{2} dx = \frac{M}{2I} y^2 dx$$

son point d'application a pour coordonnée :

$$x \text{ et } \frac{2}{3} y.$$

Les coordonnées de la résultante de toutes les forces agissant sur Ω_1 sont données par :

$$x_1 = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx}$$

$$y_1 = \frac{\int y_3 dx}{\int y^2 dx}$$

les intégrales étant prises suivant $A D B$.

De même pour Ω_2 , on a $x_2 y_2$ de même forme que $x_1 y_1$.

Soit P_1 le point de coordonnées $x_1 y_1$ et P_2 le point de coordonnées $x_2 y_2$.

Je dis que la droite P_1P_2 est parallèle au diamètre conjugué, GY de GX .

Pour le démontrer, abandonnons les expressions précédentes commodes pour un calcul numérique, et que nous utiliserons dans les applications.

On peut également écrire :

$$x_1 = \frac{\iint xy \, dx \, dy}{\iint y \, dx \, dy}$$

$$y_1 = \frac{\iint y^2 \, dx \, dy}{\iint y \, dx \, dy}$$

ces intégrales étant étendues à l'aire.

Pour simplifier l'écriture posons :

$$\iint xy \, dx \, dy = I_1^{xy}$$

$$\iint y^2 \, dx \, dy = I_1^x$$

$$\iint y \, dx \, dy = \mu_1^x$$

on peut alors écrire :

$$x_1 = \frac{I_1^{xy}}{\mu_1^x}$$

$$y_1 = \frac{I_1^x}{\mu_1^x}$$

on a de même pour les coordonnées du point

$$x_2 = \frac{I_2^{xy}}{\mu_2^x}$$

$$y_2 = \frac{I_2^x}{\mu_2^x}$$

La pente m de la droite P_1P_2 est donnée par l'expression :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{I_2^x \mu_1^x - I_1^x \mu_2^x}{I_2^{xy} \mu_1^x - I_1^{xy} \mu_2^x}$$

Soit D une droite parallèle à P_1P_2 et passant par l'origine G des coordonnées.

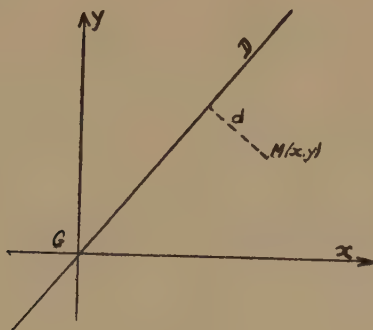


FIG. 20.

L'équation de D est :

$$mx - y = 0$$

par suite on peut écrire :

$$d = \frac{mx - y}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Posons :

$$I_{xD} = \iint (yd) \, dx \, dy$$

l'intégration étant étendue à Ω_1 et Ω_2

$$I_{xD} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \left[m \iint xy \, dx \, dy - \iint y^2 \, dx \, dy \right]$$

$$I_{xD} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} [m(I_1^{xy} + I_2^{xy}) - (I_1^x + I_2^x)]$$

$$I_{xD} = \frac{[(I_1^{xy} + I_2^{xy})(I_2^x \mu_1^x - I_1^x \mu_2^x) - (I_1^x + I_2^x)(I_2^{xy} \mu_1^x - I_1^{xy} \mu_2^x)]}{\sqrt{1 + m^2}(I_2^{xy} \mu_1^x - I_1^{xy} \mu_2^x)}$$

or :

$$\mu_1^x + \mu_2^x = 0$$

car G est le centre de gravité et

$$I_1^x + I_2^x = I^x$$

et

$$I_1^{xy} + I_2^{xy} = I^{xy}$$

ce qui permet de simplifier l'écriture de l'expression à l'intérieur du [] qui s'écrit alors :

$$[I^{xy} \cdot I^x \cdot \mu_1^x - I^{xy} \cdot I^x \cdot \mu_1^x]$$

Cette expression est identiquement nulle, donc D est diamètre conjugué de OX dans l'ellipse centrale d'inertie.

Pour que cette conclusion soit exacte, il faut que

$$I_2^{xy} \cdot \mu_1^x - I_1^{xy} \cdot \mu_2^x \neq 0$$

nous savons que $\mu_1^x = -\mu_2^x$

donc

$$I_2^{xy} \cdot \mu_1^x - I_1^{xy} \mu_2^x = \mu_1^x (I_2^{xy} + I_1^{xy}) = \mu_1^x I^{xy}$$

or $I^{xy} = 0$ si ox et oy sont les diamètres de l'ellipse centrale d'inertie. Dans ce cas, on a comme on pouvait le prévoir :

$$x_1 = x_2$$

Cisaillement. Centre de torsion.

Considérons une section droite quelconque d'une poutre prismatique soumise à des efforts de flexion et de cisaillement.

La résultante des forces de cisaillement élémentaires est égale à l'effort tranchant, l'égalité étant vectorielle. Nous avons vu que l'effort tranchant, donc la force dont il est la projection orthogonale, est parallèle au diamètre conjugué de l'axe de flexion dans l'ellipse centrale d'inertie.

Soit Gx un axe de l'ellipse centrale d'inertie et Gy l'autre axe.

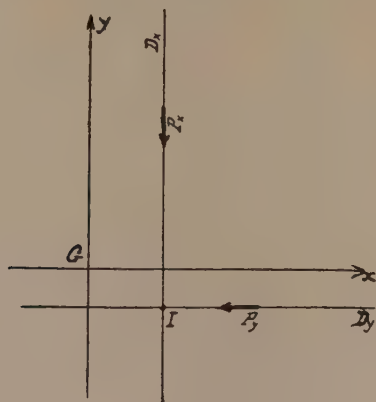


FIG. 21.

La force P_x correspondant à la flexion d'axe Gx est donc parallèle à Gy .

On conçoit fort bien qu'en déplaçant P_x parallèlement à Gy on puisse non seulement fléchir la poutre, mais la tordre, tantôt.

dans un sens, tantôt dans un autre, et qu'il existe une position ne passant pas forcément par G pour laquelle il n'y a pas de torsion.

De même il existe une droite Dy parallèle à Gx et telle que toute force portée par Dy donne une flexion d'axe Gy , sans torsion.

Soit I le point de rencontre Dx et Dy .

Toute force passant par I peut être décomposée suivant Dx et Dy en deux forces ne donnant pas de torsion, ainsi que nous l'avons vu précédemment. Ce point I est donc tel que si l'on prend les moments par rapport à lui, de toutes les forces de cisaillement élémentaires, on obtient un moment nul.

Le point I sera appelé centre de torsion. C'est par rapport à un axe, lieu du point I , que nous prendrons les moments des forces appliquées à la poutre, pour avoir le couple de torsion. Des expériences faites sur des poutres prismatiques de sections analogues à celle figurée par le croquis N° 15 ont permis de vérifier que, sous l'action d'un couple d'axe parallèle à la poutre, celle-ci tourne autour d'un axe lieu des points I déterminés précédemment.

Pour une section se *rapprochant* d'une surface ayant deux axes de symétrie, le point I est très voisin du centre de gravité et sa position difficile à déterminer expérimentalement.

Dans le cas d'un corps creux et mince, voyons ce que deviennent les propositions que nous venons de démontrer.

Corps creux et minces. Flexion. Cisaillement. Torsion. Définition.

Un corps mince est un corps dont on néglige l'épaisseur et qui n'admet que des forces de cisaillement tangentes à la ligne fermée qui définit sa section.

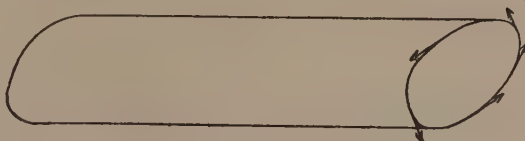


FIG. 22.

Flexion. — Considérons la section droite d'un corps prismatique, creux et mince, d'épaisseur e négligeable. Soit G le centre de gravité de la section, réduite à une ligne et Gx un axe de flexion quelconque.

Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire le couple et l'effort tranchant pour que Gx soit axe de flexion.

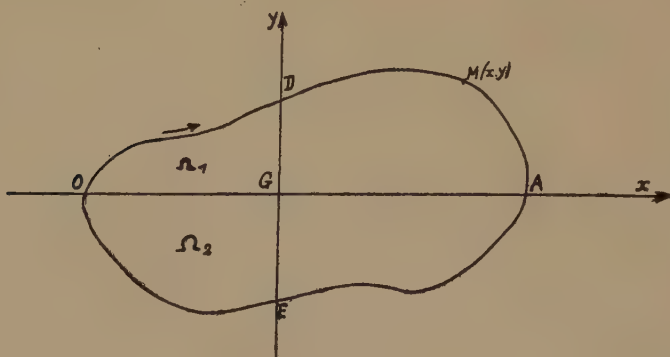


FIG. 23.

Soit $M(x, y)$ un point de la section.

Avec nos notations habituelles, on a :

$$n_{xy} = \frac{E}{\rho} y$$

Prenons sur le contour une origine O et un sens indiqué par la flèche.

Soit S l'arc OM mesuré sur le contour ainsi orienté.

L'effort de compression, ou de traction, normal à la section et s'exerçant sur un arc ds est égal à $ne ds$, et on a :

$$ne ds = \frac{eE}{\rho} y ds$$

Soit P_1 de coordonnées $x_1 y_1$ le point d'application de la résultante de toutes les forces $ne ds$, on a, en intégrant le long de $OD A$:

$$x_1 = \frac{\int xy ds}{\int y ds}$$

$$y_1 = \frac{\int y^2 ds}{\int y ds}$$

On a de même, en intégrant suivant $A E O$, les coordonnées $x_2 y_2$ d'un point P_2

$$x_2 = \frac{\int xy ds}{\int y ds}$$

$$y_2 = \frac{\int y^2 ds}{\int y ds}$$

Puisque G est centre de gravité, on a :

$$\int_{\widehat{O D A}} y ds + \int_{\widehat{A E O}} y ds = 0$$

Calculons $\int xy ds$. Pour cela considérons deux axes GX et GY tels que GX soit confondu avec Gx et GY soit diamètre conjugué de Gx dans l'ellipse centrale d'inertie.

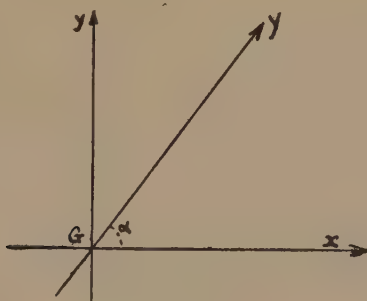


FIG. 24.

Nous savons que $\int XY ds = 0$, l'intégrale étant étendue à la totalité du contour.

On passe du système Gxy au système GXY , par les formules suivantes :

$$y = Y \sin \alpha$$

$$x = X + Y \cos \alpha$$

ces formules nous permettent d'écrire :

$$xy = XY \sin \alpha + Y^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

et

$$\int xy \, ds = \int XY \sin \alpha \, ds + \int Y^2 \sin \alpha \cos \alpha \, ds$$

en intégrant tout le long du contour, on a :

$$\int XY \, ds = 0$$

d'où :

$$\int xy \, ds = \int Y^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \, ds = \int y^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \, ds$$

$$\int xy \, ds = I_x \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

La pente de la droite $P_1 P_2$ est égale à :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{I\Omega_1 + I\Omega_2}{\int xy \, ds} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{I_x}{I_x} = \operatorname{tg} \alpha$$

La droite $P_1 P_2$ est donc parallèle à OY .

Comme dans la flexion d'une poutre pleine, le moment de flexion a son axe perpendiculaire à GY . La démonstration faite à propos des poutres pleines s'applique d'ailleurs parfaitement au cas d'une poutre mince et on pouvait se dispenser de faire une démonstration particulière.

Cisaillement. — Soit t l'effort de cisaillement unitaire, c'est-à-dire l'effort par unité d'arc.

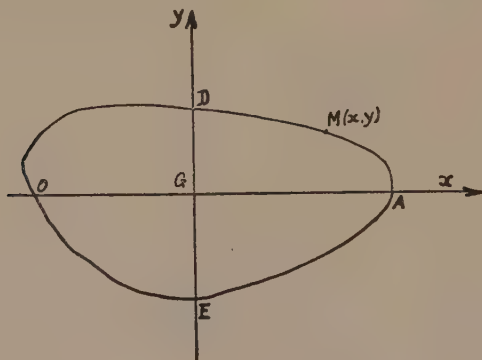


FIG. 25.

Si GZ est un axe perpendiculaire au plan de la section droite, on a :

$$\frac{dt}{ds} = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{eE}{\rho} \right) \right] y$$

Posons

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{eE}{\rho} \right) = k$$

On a :

$$t = \int_0^M ky ds + C^t$$

la composante de t suivant ox est :

$$\frac{tdx}{ds}$$

et la composante suivant oy est :

$$\frac{tdy}{ds}$$

Calculons

$$\int \frac{tdx}{ds} ds$$

$$\frac{tdx}{ds} ds = tdx$$

$$\int tdx = tx - \int xdt$$

or

$$dt = ky ds$$

donc

$$\int xdt = \int kxy ds$$

et

$$\int \frac{tdx}{ds} ds = tx - \int kxy ds$$

et la composante de $\int tds$, suivant ox , pour toute la section est égale à :

$$- \int kxy ds = \frac{-kI_x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Calculons maintenant

$$\int \frac{tdy}{ds} ds$$

$$\int \frac{tdy}{ds} ds = \int tdy = ty - \int ydt$$

et comme

$$dt = ky \, ds$$

$$\int y \, dt = \int ky^2 \, ds$$

et

$$\int t \, dy = ty - \int ky^2 \, ds$$

en intégrant tout le long du contour, on a :

$$\int \frac{t \, dy}{ds} \, ds = -K I_x$$

La pente de la composante des forces de cisaillement est donc égale à :

$$\frac{-K I_x}{-K \frac{I_x}{\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha$$

Cherchons la position de cette composante des efforts de cisaillement. On démontrerait comme dans le cas d'une section pleine que la composante T passe par un point fixe I . Pour avoir le couple de torsion, on prendra le moment des forces directement appliquées par rapport à la droite lieu des points I . Cette droite sera appelée axe de torsion.

Lorsque le contour admet un axe de symétrie, le point I se trouve sur cet axe et sa détermination se trouve simplifiée. Dans le cas le plus général, il faudra déterminer l'ellipse centrale d'inertie et calculer les coordonnées de deux points correspondant à des axes de flexion différents.

Nous voyons que dans le cas des corps minces, nous pouvons déterminer rigoureusement le centre de torsion. En fait, c'est presque toujours un corps mince que l'on fait travailler en torsion. Il est exceptionnel de rencontrer une poutre pleine dont la section n'admet pas de centre de symétrie et travaillant en torsion.

Calcul de la fatigue du cisaillement.

Nous avons vu que la fatigue unitaire de cisaillement (par unité d'arc) est t , tel que

$$t = \int_0^M Ky \, ds + C^0$$

Posons

$$\mathcal{C}^0 = t_0 = \text{fatigue en } O$$

Le calcul de t se ramène au calcul de $\int yds$ et à la détermination de t_0 .

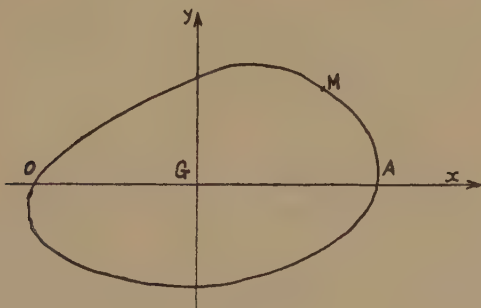


FIG. 26.

Pour déterminer t , nous remarquons que, puisqu'il n'y a pas de torsion, on a évidemment :

$$\int tds = 0$$

lorsque l'intégrale est prise tout le long du contour fermé déterminant la section de la poutre.

Dans l'intégrale $\int tds$ se trouve l'intégrale d'une fonction connue :

$$\int yds$$

et l'intégrale :

$$\int t_0 ds$$

L'équation :

$$\int tds = 0$$

ne renferme que t_0 comme inconnue.

Il est donc possible de résoudre très simplement ce problème.

Lorsqu'il existera un moment de torsion, nous admettrons que la fatigue de cisaillement est la même en tout point du contour.

Dans ces conditions, si $\mathcal{C}$ est le couple de torsion et Ω l'aire totale intérieure au contour, on a :

$$2t \Omega = \mathcal{C}$$

C'est la formule classique valable seulement dans le cas où il n'y a pas d'effort de tension ou de compression engendré par la torsion. Cette condition pose le problème de la déformation de la section impossible à résoudre dans le cas général.

Pour résumer notre étude de la torsion, nous pouvons dire que

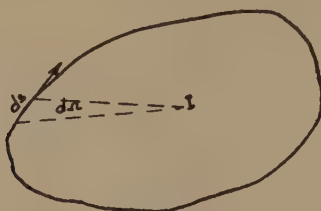


FIG. 27.

lorsque la torsion provient de forces directement appliquées, nous saurons calculer le moment de torsion, car nous connaissons l'axe de torsion.

Si la poutre est un prisme de section pleine et très rigide, nous pourrions calculer les fatigues par la méthode de SAINT-VENANT, mais en prenant pour centre de torsion le point I que nous avons déterminé. Dans le cas où la section est creuse et mince, la formule $2 t \Omega = \mathcal{C}$ sera valable si la section est de forme assez régulière et sans point anguleux.



Application du calcul des forces d'aplatissement à des poutres de sections courantes.

1° Profilé mince en double té.

Supposons le double té à ailes égales.

Soit h la hauteur et b la largeur, e l'épaisseur.

Soit n le taux de travail admis.

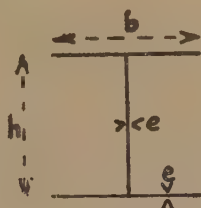


FIG. 28.

Le moment fléchissant correspondant à la fatigue n est approximativement égal à :

$$M = n e b h$$

On a de façon approchée :

$$I = \frac{2 e b h^2}{4} = \frac{b e h^2}{2}$$

Nous admettons que :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2 n e b h}{E b e h^2} = \frac{2 n}{E h}$$

Prenons le mm. comme unité de longueur et négligeons la variation du moment fléchissant quand on se déplace de 1 mm. sur l'axe du double té.

La force unitaire d'aplatissement f_a étant égale à n/ρ , la force totale d'aplatissement agissant sur une bande de semelle de 1 mm. de profondeur est égale à :

$$\frac{n e b}{\rho} = \frac{2 n^2 e b}{E h}$$

Considérons la petite poutre transversale constituée par une bande de demi-semelle de 1 mm. de large.

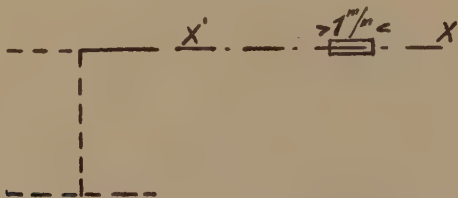


FIG. 29.

Son moment d'inertie par rapport à l'axe est égal à :

$$\frac{e^3}{12}$$

Appelons n_t la fatigue transversale maximum de compression ou de tension de la semelle.

Le moment maximum dans notre petit élément de semelle est égal à :

$$\frac{n^2 e b}{E h} \cdot \frac{b}{2}$$

On a donc :

$$n_t = \frac{n^2 e b^2}{2 E h} \cdot \frac{12 e}{2 e^3} = 3 \frac{n^2 b^2}{E h e}$$

Pour que la destruction de la poutre ne soit pas due aux phénomènes d'aplatissement, il faut que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\frac{3 n^2 b^2}{E h e} < n$$

ou

$$E h e \geq 3 n b^2$$

Supposons que nous ayons affaire à une section pour laquelle $b = 60$ mm., $e = 0$ mm. 5, $n = 80$ kgmm. Prenons pour E la valeur 20.000, on a :

$$h \geq \frac{3 \times 80 \times 60^2}{20.000 \times 0,5}$$

d'où

$$h \geq 136 \text{ mm}, 8$$

Si la hauteur de la poutre est inférieure à 136 mm. 8, le rapprochement des semelles entraînera la rupture de la poutre.

En fait, l'essai en flexion pure d'un double té répondant à la condition $3 n b^2 > E h e$ montre un phénomène très net de rapprochement des âmes conformément au croquis ci-dessous.

Pour traiter le problème d'une façon plus rigoureuse, il faut



FIG. 30.

tenir compte de la diminution du moment d'inertie de la section due au fléchissement des semelles. Dans la pratique, cette diminution du moment d'inertie est parfois supérieure de 10 % au moment d'inertie primitif.

Etant donné un certain profilé en double té, pour vérifier si l'aplatissement est dangereux, on procédera de la façon suivante.

Connaissant le taux de travail n admissible pour le matériau,

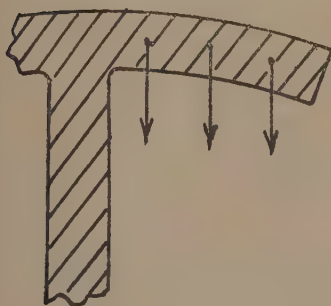


FIG. 31.

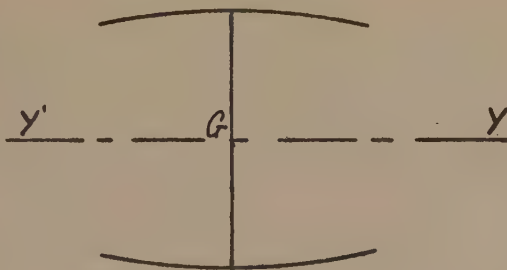


FIG. 32.

on cherchera quelle est la charge uniformément répartie sur une bande de demi-semelle comprise entre deux sections distantes de 1 mm., capable de provoquer dans la semelle une fatigue n .

L'équation de la ligne moyenne déformée de la petite poutre en porte à faux que nous considérons est connue, donc on peut calculer le moment d'inertie par rapport à $Y Y'$.

Connaissant le moment d'inertie et l'aplatissement, on connaît

le moment fléchissant et la fatigue dans la section considérée du double té. La fatigue ainsi trouvée doit être supérieure à n .

2° Poutre caisson en bois à semelles minces et âmes rigides.

Nous supposons que l'effort tranchant est encaissé en totalité par les âmes.

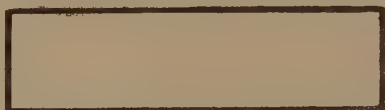


FIG. 33.

La poutre se déformera, en section, suivant le croquis ci-dessous.

Pour simplifier, nous raisonnerons sur une tranche de poutre de 1 mm., le mm. étant notre unité de longueur.



FIG. 34.

Les semelles sont supposées en contreplaqué trois plis, les fibres extérieures étant parallèles à l'axe de la poutre.

Soit e l'épaisseur du contreplaqué des semelles et n le taux de travail admis pour le contreplaqué. Le moment fléchissant que la poutre peut encaisser est égale à :

$$M = n e b h$$

Le moment d'inertie I est approximativement donné par l'expression :

$$I = \frac{2 h^2 e b}{4} = \frac{h^2 e b}{2}$$

La force unitaire d'aplatissement est égale à n/ρ et nous savons que $1/\rho = \frac{M}{EI}$. Chaque tranche de semelle se comporte comme si elle était soumise à une charge uniformément répartie égale à $\frac{ne}{\rho}$ par mm.

On peut écrire :

$$\frac{ne}{\rho} = \frac{neM}{EI}$$

et en tenant compte de la valeur de M et de l'expression de I en fonction de e, b, h , on a :

$$\frac{ne}{\rho} = \frac{2n^2e}{Eh}$$

Le moment fléchissant maximum donné par cette charge unitaire est égal à :

$$\frac{2n^2eb^2}{12Fh}$$

car nous supposons la déformation identique à celle du croquis précédent, c'est-à-dire que l'on admet que la bande transversale de semelle est encastree à ses extrémités.

Si nous admettons que les deux plis extrêmes du contreplaqué sont négligeables pour la tenue aux efforts d'aplatissement, nous ne devons compter que sur une épaisseur de $\frac{e}{3}$, mais en prenant un taux de travail de $\frac{3n}{2}$.

Le moment d'inertie de notre petite poutre est alors égal à :

$$\frac{e^3}{4.3^4}$$

La fatigue dans le pli central est donc égale à :

$$\frac{9n^2b^2}{Ehe}$$

Pour que l'aplatissement ne soit pas à craindre, il faut que l'on ait :

$$\frac{9n^2b^2}{Ehe} < n$$

ou :

$$9nb^2 \leq Ehe$$

Traitons quelques cas concrets.

a) Posons :

$$h = 300 \frac{m}{m}.$$

$$e = 3 \frac{m}{m}.$$

$$n = 3 \text{ kgr. } \frac{m}{m^2}.$$

$$E = 1.000$$

on obtient :

$$b^2 < \frac{1.000 \times 300 \times 3}{9 \times 3}$$

d'où :

$$b^2 \leq 33.333$$

et

$$b \leq 182 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

b) Posons :

$$h = 300 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

$$e = 6 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

$$n = 3 \text{ kgr. } \frac{\text{m}}{\text{m}^2}.$$

on a :

$$b^2 \leq 100.000$$

soit :

$$b \leq 316 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

c) Posons :

$$h = 300 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

$$e = 9 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

$$n = 3 \text{ kgr. } \frac{\text{m}}{\text{m}^2}$$

$$E = 1.000$$

on a :

$$b^2 \leq 300.000$$

soit :

$$b \leq 540 \frac{\text{m}}{\text{m}}.$$

Ces exemples nous montrent qu'il est utile de vérifier les fatigues d'aplatissement avant de fixer les dimensions d'une poutre caisson semblable à celle que nous venons d'étudier.

CAISSON AVEC SEMELLES RENFORCÉES PAR DES LISSES.

Considérons un caisson analogue au caisson de l'exemple (a), mais renforçons les semelles avec des lisses intérieures et exté-



FIG. 35.

rieures conformément au croquis ci-dessous, et de manière à obtenir des semelles capables d'encaisser des efforts correspondant à une épaisseur uniforme de 9 mm.

La charge d'aplatissement correspond sensiblement à celle obtenue dans l'exemple (c), mais la résistance à l'aplatissement est la même que dans l'exemple (a), la largeur b , que l'on ne devrait pas dépasser sera donc telle que son carré soit égal à :

$$b^2 \leq \frac{33.333}{3} = 10.000$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$b \leq 100 \text{ mm.}$$

La largeur maximum de la poutre est donc de 100 mm., alors que si la matière est disposée d'une façon continue sous forme de contreplaqué, on peut avoir une largeur de 540 mm.

Nous insistons sur cet exemple, car il explique les échecs qui ont eu lieu chaque fois que l'on a voulu renforcer une poutre caisson par des lisses, sans avoir soin de cloisonner soigneusement pour éviter l'aplatissement.

3° Poutre creuse à section circulaire (tube) en métal.

Soit e l'épaisseur du tube supposé mince et r le rayon

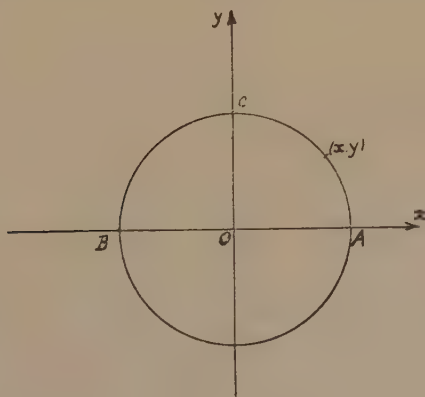


FIG. 36.

En un point (x, y) , la fatigue de flexion est égale à :

$$N_{(x, y)} = \frac{My}{I}$$

Considérons la portion de tube comprise entre deux plans distants de 1 mm., et prenons le mm. pour unité de longueur. En

(x, y) la force unitaire d'aplatissement est égale à $\frac{N(x, y)}{\rho}$, et en tenant compte de l'égalité :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

on peut écrire :

$$\frac{N(x, y)}{\rho} = \frac{M^2}{EI^2} y = \Gamma y$$

en posant, pour simplifier l'écriture :

$$\Gamma = \frac{M^2}{EI^2}$$

Considérons l'arc $A C B$ formé par une moitié de la section. En A et B s'exercent des réactions verticales R et des couples de valeur absolue C .

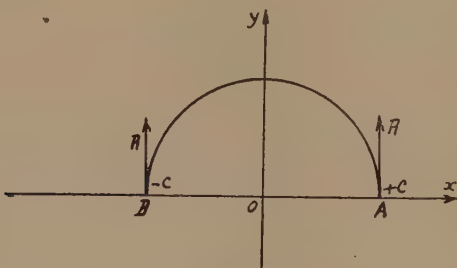


FIG. 37.

Calculons R

$$R = \int_A^C \Gamma y \, ds$$

on a :

$$y \, ds = y \frac{ds}{dx} \, dx = -y \frac{r}{y} \, dx = -r \, dx$$

donc :

$$R = -\Gamma \int_A^C r \, dx = -\Gamma r(x)_r^o = +\Gamma r^2$$

Pour calculer l'arc $A B$, hyperstatique extérieurement, considérons un arc $A B$ identique, mais tel qu'en A et B il ne puisse pas y avoir de réaction donnant un couple.

Appliquons en A et B à l'arc rendu isostatique des couples arbitraires $\mathcal{M}$ et $-\mathcal{M}$. Ne tenons compte que des déformations de flexion et écrivons que dans la déformation de l'arc hyperstatique le travail des forces élastiques engendrées par $\mathcal{M}$ et $-\mathcal{M}$ est nul.

On a, si M_t est le moment réel en x, z dans l'arc AB :

$$\int_A^B \mathfrak{M} M_t ds = 0$$

qui est équivalent à :

$$\int_A^B M_t ds = 0$$

Pour calculer cette intégrale, cherchons d'abord à évaluer M_t

$$M_t = C - \left| \int_A^{x,y} \Gamma Y (X-x) ds \right| + \Gamma r^2 (r-x)$$

X étant la variable et x une des limites d'intégration.

On a :

$$Y ds = -r dX$$

donc :

$$Y X ds = -r X dX$$

$$Y x ds = -rx dX$$

et

$$\int Y (X-x) ds = \int r (x-X) dX = rX \left(a - \frac{X}{2} \right) + Cte$$

$$\left| \int_A^{x,y} \Gamma Y (X-x) ds \right| = \frac{\Gamma}{2} (rx^2 - 2r^2x + r^3)$$

On a donc :

$$M_t = C - \frac{\Gamma}{2} (rx^2 - 2r^2x + r^3) + \Gamma r^2 (r-x)$$

$$M_t = C - \frac{\Gamma}{2} (rx^2 - r^3)$$

et

$$\int_B^A M_t ds = 0 \text{ va nous permettre d'obtenir } C.$$

$$\int_A^B M_t ds = \int_A^B C ds = \frac{-r\Gamma}{2} \int_A^B (x^2 - r^2) ds$$

$$\int_A^B C ds = \pi r C$$

$$\int_A^B x^2 ds = r^3 \int_A^B \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{r^3}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \alpha \Big|_A^B$$

$$\int_A^B x^2 ds = \frac{\pi r^3}{2}$$

$$\int_A^B r^2 ds = \pi r^3$$

$$\int_A^B (x^2 - r^2) ds = \frac{r^3 \pi}{2}$$

d'où

$$\int_A^B M_t ds = \pi r C + \frac{\Gamma \pi r^4}{4} = 0$$

et

$$C = -\frac{\Gamma r^3}{4}$$

et

$$M_t = \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{r^3}{2} - r x^2 \right)$$

Le moment d'inertie de la poutre $A C D$ de largeur 1 mm. et d'épaisseur e est égal à $\frac{e^3}{12}$ et son $\frac{I}{v}$ est égal à $\frac{e^2}{6}$.

La fatigue de flexion dans $A C D$ est donc donnée par

$$\frac{3\Gamma}{e^2} \left(\frac{r^3}{2} - r x^2 \right)$$

L'équation

$$y = \frac{r^3}{2} - r x^2$$

représente une parabole dont la seule partie utile est comprise entre les points correspondant aux abscisses $-r$ et $+r$.

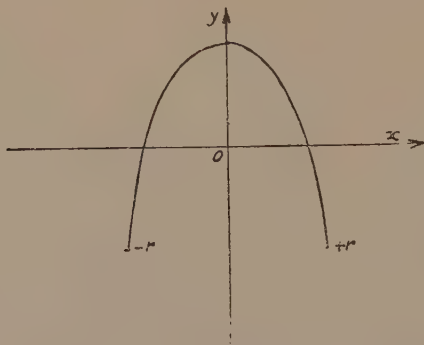


FIG. 38.

Pour $x = 0$ et $x = r$ la fatigue est la même, c'est la fatigue maximum.

Au point A , la fatigue de compression est égale à $\frac{\Gamma r^2}{e}$. La fatigue maximum est donc donnée par l'expression :

$$\frac{\Gamma r^2}{e} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{e} \right)$$

Soit n_a cette fatigue.

Comme $\Gamma = \frac{M^2}{EI^2}$ et $n = \frac{M_r}{I}$ on a :

$$\Gamma = \frac{n^2}{Er^2}$$

et

$$n_a = \frac{n^2}{Ee} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{e} \right)$$

Si nous prenons $e = 2$ mm.

$r = 100$ mm.

$n = 100$ kgr. 2

$E = 20.000$

on a :

$$N_a = 1 \text{ k, } 9$$

Ce chiffre montre l'intérêt des tubes lorsqu'on les fait travailler en flexion. Pour qu'un tube circulaire périsse par aplatissement, il faut que son diamètre soit excessivement grand par rapport à son épaisseur. Pratiquement l'aplatissement n'est pas à craindre.

D'une façon générale, il faudra avoir, pour qu'il n'y ait pas d'aplatissement :

$$\frac{n^2}{Ee} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{e} \right) < n$$

d'où

$$\frac{n}{Ee} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{e} \right) < 1$$

Pour un matériau donné, E et n sont connus, cherchons à quelles conditions r et e doivent satisfaire.

L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$3nr - 2Ee^2 + 2en < 0$$

Considérons l'équation :

$$2Ee^2 - 2en - 3nr = 0$$

En prenant r et e comme variable, l'équation représente une parabole de direction asymptotique parallèle à l'axe des r .

La tangente à l'origine est :

$$3r + 2e = 0$$

c'est la même pour toutes les paraboles obtenues en faisant varier E et n .

Cette parabole coupe l'axe des e au point :

$$\frac{n}{E}$$

Traçons la parabole en prenant comme abscisses les e et comme ordonnées les r .

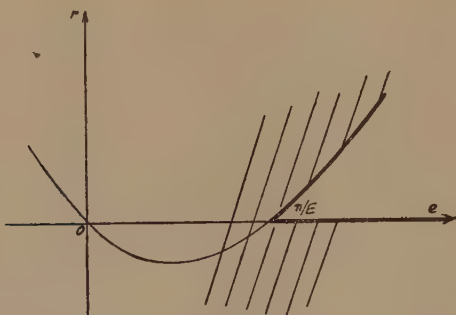


FIG. 39.

Seule la branche infinie pour $e > 0$ et limitée au point d'abscisse n/E offre un sens pour nous.

Pour que l'inégalité :

$$3nr - 2Ee^2 + 2ne < 0$$

soit satisfaite, il faut que le point (e, r) soit dans la zone non hachurée.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs relatives de e et r on peut considérer que le moment d'inertie d'une section du tube peut s'exprimer par l'expression approchée $\pi r^3 e$.

Soit r le rayon moyen et e l'épaisseur, on a :

$$I = \frac{\pi}{4} re (4r^2 + e^2)$$

et

$$\frac{I - \pi r^3 e}{\frac{\pi re}{4} (4r^2 + e^2)} = \frac{e^2}{4r^2 + e^2}$$

Supposons que la précision de nos calculs ne demande qu'une valeur des fatigues calculée à $1/p$ près, on a alors :

$$\frac{e^2}{4r^2 + e^2} \geq 1/p$$

ou

$$\frac{4r^2 + e^2}{e^2} \geq p$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left(\frac{2r}{e}\right)^2 \geq p - 1$$

Si une fatigue n'a besoin d'être connue qu'au $1/50^e$, on a :

$$p - 1 = 49$$

et

$$\frac{2r}{e} = 7.$$

La parabole tracée précédemment ne sera donc utile qu'à partir de son point de rencontre avec la droite $\frac{2r}{e} - 7 = 0$.

Représentons la parabole à une autre échelle, la surface utile sera alors celle non hachurée et bordée par un trait renforcé.

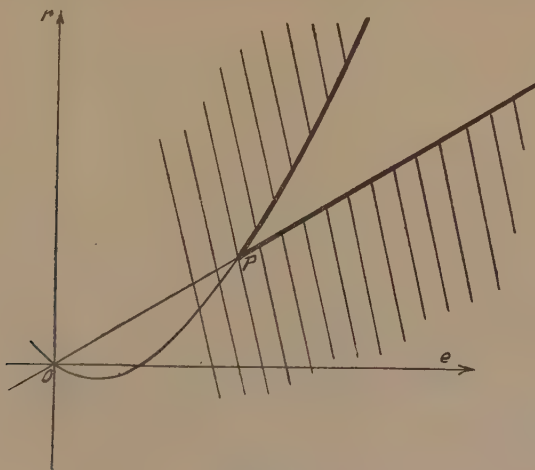


FIG. 40.

Soit P le point de rencontre de la droite $\frac{2r}{e} - 7 = 0$ avec la parabole.

L'équation de la parabole contient le paramètre $\frac{n}{E}$. Examinons les différentes valeurs de $\frac{n}{E}$ obtenues avec des matériaux différents.

Pour le bois, $E = 100$ et n dépend de l'essence. Pour avoir la même parabole que pour l'acier doux, il faut que le taux de travail du bois soit égal à :

$$\frac{25.000}{20.000} = 1 \text{ k. } 250$$

Les bois les moins résistants rentrent dans cette catégorie. Le peuplier peut travailler à 2 kgr. 500, par suite la parabole est la même que celle d'un acier, dont la limite élastique est égale à 50 kgr. Le duralumin, sensiblement aussi résistant que l'acier doux, possède un coefficient d'élasticité environ trois fois moins élevé, sa parabole est donc la même que celle d'un acier dont la limite élastique est voisine de 75 kgr.

Les proportions de la figure ne mettent pas en évidence le fait que P se trouve extrêmement près de O .

Calculons par exemple l'intersection de la parabole :

$$3nr - 2Ee^2 + 2en = 0$$

avec la droite

$$\frac{2r}{e} = 7$$

on a :

$$\frac{21}{2} ne - 2Ee^2 + 2ne = 0$$

en dehors de la solution $e = 0$, on a la valeur :

$$e = \frac{25n}{4E}$$

Si $n = 100 \text{ K.}$, $E = 20.000$, ce qui correspond à un excellent acier, on a pour l'abscisse de P :

$$e = \frac{25.000}{80.000} = \frac{1 \text{ mm.}}{32}$$

et l'ordonnée :

$$r = \frac{7 \times 32}{2}$$

Cette valeur de e est si petite que l'on peut dire que pratiquement toute la branche de la parabole peut être utilisée sans autre limite que celle imposée par les dimensions mêmes des tubes.

La formule approchée donnant le moment d'inertie sera valable si l'épaisseur et le rayon du tube sont les coordonnées d'un point se trouvant dans la zone non hachurée de notre dernière figure.

Effet dynamique des forces extérieures sur les poutres creuses.

Nous allons d'abord traiter la question sans faire intervenir la forme de la section de la poutre.

Considérons une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

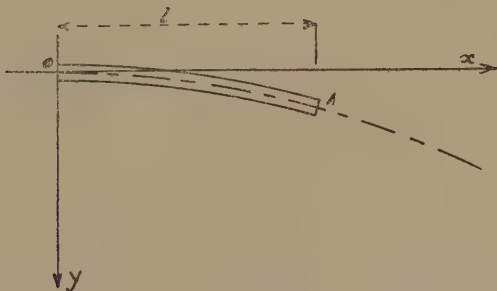


FIG. 41.

Soit l la longueur de cette poutre et p son poids par unité de longueur.

Nous supposons la poutre prismatique et admettant un plan de symétrie qui est le plan de flexion. Soit Ox la ligne moyenne de la poutre supposée sans poids. Soit OA la déformée de la ligne moyenne sous l'action du poids $p l$ de la poutre. Nous négligerons la différence entre OA et sa projection sur Ox et nous mesurerons les ordonnées à partir de la ligne OA .

Laissons tomber un poids P sur l'extrémité libre de la poutre, d'une hauteur h .

La poutre fléchit et sa flèche maximum correspond à une flèche qui serait obtenue avec un certain poids $\mathcal{P}$ plus grand que P et agissant statiquement.

Les ordonnées y de la déformée correspondant à $\mathcal{P}$ sont telles que l'on ait :

$$EIy'' = \mathcal{P} (l - x)$$

Le travail des forces extérieures correspondant à la flèche f est égal à :

$$\mathcal{Q}(h + f) + \int_0^l p y dx$$

$\mathcal{M}$ étant le moment fléchissant au point d'abscisse x correspondant à la flèche maximum et $\mathcal{M}_0$ le moment correspondant à la position OA , le travail des forces moléculaires, lorsque la ligne moyenne varie de la position OA à la flèche maximum, est (en ne tenant compte que de la flexion) :

$$\frac{1}{2EI} \int_0^l (\mathcal{M}^2 - \mathcal{M}_0 \mathcal{M}) dx$$

On doit donc avoir la relation :

$$P(h + f) + \int_0^l p y dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M}_0 \mathcal{M} dx$$

La résolution de cette équation nous donne une relation entre $\mathcal{Q}$ et f que l'on obtient plus rapidement en supposant la poutre sans poids et écrivant :

$$P(h + f) = \frac{1}{2EI} \int_0^l \mathcal{M}^2 dx$$

comme

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q}(l - x)$$

$$P(h + f) = \frac{1}{2EI} \int_0^l \mathcal{Q}^2 (l - x)^2 dx$$

d'où

$$P(h + f) = \frac{\mathcal{Q}^2 l^3}{6EI}$$

comme d'autre part

$$f = \frac{\mathcal{Q} l^3}{3EI}$$

par définition même de $\mathcal{Q}$, on peut écrire :

$$P(h + f) = \frac{3EI}{2l^3} f^2$$

relation cherchée entre f et h .

Si $h = 0$, on a :

$$Pf = \frac{3EI}{2l^3} f^2$$

d'où

$$f = \frac{2 Pl^3}{3 EI}$$

$h = 0$ correspond à une hauteur de chute nulle. Dans ce cas, la flèche maximum est donc le double de ce qu'elle est lorsque la même charge est appliquée statiquement.

L'équation

$$P(h + f) = \frac{3 EI}{2 l} f^2$$

représente une parabole lorsque l'on regarde f et h comme seules variables.

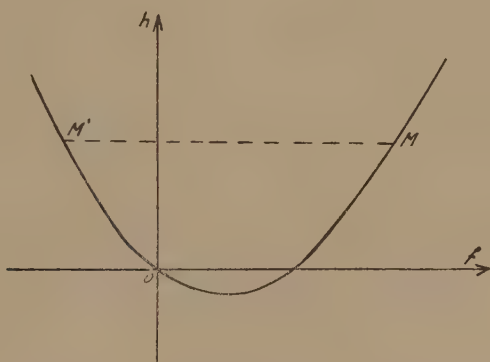


FIG. 42.

Le point A d'abscisse $f_A = \frac{2 Pl^3}{3 EI}$ correspond à la hauteur de chute zéro. Pour une hauteur de chute h quelconque, la poutre a une flèche maximum donnée par l'abscisse du point M, et s'il n'y avait pas d'amortissement, il y aurait oscillation entre deux positions extrêmes déterminées par les abscisses des points M et M'.

Si la charge au lieu d'être appliquée brusquement au point A, est appliquée d'une façon progressive, mais dans un temps fini, en fin d'application de la charge, la poutre possède une certaine vitesse et la flèche maximum qu'elle prend est comprise entre

$$\frac{Pl^3}{3 EI} \text{ et } \frac{2 Pl^3}{3 EI}.$$

Si le temps d'application de la charge progressive est infiniment grand, on a la flèche statique :

$$\frac{Pl^3}{3 EI}$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie tombant sur la poutre, on a des résultats qui se traduisent par la parabole :

$$ph \cong \frac{2}{5} f \left(\frac{4EI f}{l^4} - p \right)$$

p étant la charge par unité de longueur.

On a toujours, pour une hauteur de chute zéro, une flèche double de la flèche statique. Dans le cas où un poids agit brusquement sur un fil, de façon à donner à celui-ci une tension, on arrive aux mêmes conclusions concernant l'augmentation de flèche dynamique par rapport à la flèche statique. Là encore, la hauteur de chute zéro donne une flèche qui est le double de flèche obtenue par application statique de la charge.

Cas particuliers des poutres creuses et minces.

Les quelques exemples de poutres minces dont nous avons calculé l'aplatissement nous ont montré que dans certains cas la déformation de la section était considérable et donnait lieu à des

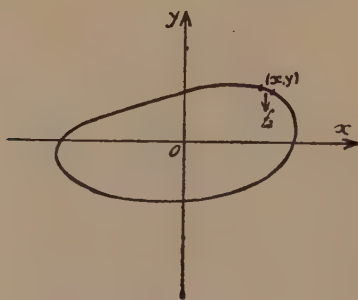


FIG. 43.

fatigues énormes. En isolant des portions de poutres par des sections parallèles aux sections droites, on obtient des petites poutres transversales qui se déforment en même temps que la poutre proprement dite, et dont le travail des forces moléculaires doit intervenir comme terme complémentaire dans l'équation que nous avons utilisée.

On regardera un élément de poutre compris entre deux sections droites comme soumis à des forces verticales fa et l'on appliquera la formule habituelle :

$$\frac{1}{2EI} \int \mathfrak{N}^2 ds$$

pour calculer le travail moléculaire.

Si l'on veut une précision plus grande, on peut aussi faire intervenir l'effort tranchant et la compression, et appliquer la formule :

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

Cas d'un caisson en bois.

Supposons que le caisson possède une section rectangulaire mesurant : 1 m. 500 $\times$ 0 m. 400, et que les grands côtés, les seuls envisagés pour les efforts de flexion, soient constitués par un contreplaqué de 8 mm. d'épaisseur (plis égaux, plis extrêmes parallèles à l'axe de la poutre).

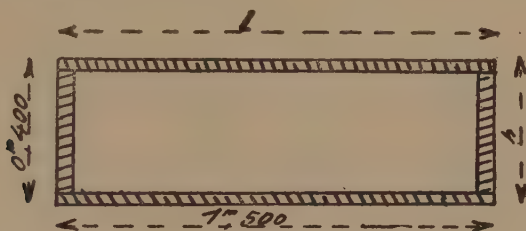


FIG. 44.

1° Le caisson est cloisonné de telle façon qu'il n'y ait aucun aplatissement possible des semelles.

Encastrons le caisson à une extrémité et appliquons une charge P à l'autre extrémité. La flèche f est reliée à la hauteur de chute h par l'équation :

$$P(h + f) = \frac{3EI}{2l^3} f^2$$

qui, résolue par rapport à h , donne :

$$h = \frac{3EI}{2Pl^3} f^2 - f$$

2° Aucune cloison n'empêche l'aplatissement.

a) La déformation de la semelle est analogue à celle représentée par le croquis ci-après :

chaque élément transversal de semelle peut donc être considéré comme une poutre chargée uniformément et posée sur des appuis simples à ses extrémités.

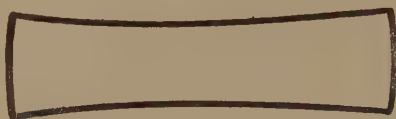


FIG. 45.

La force unitaire d'aplatissement fa est donnée par :

$$fa = \frac{M^2 h}{2 EI^2}$$

Rapportons transversalement une semelle à deux axes $o x, o y$. L'axe $o y$ étant vertical et dirigé vers le bas. L'axe $o x$ étant horizontal et confondu avec l'axe de la poutre qui constitue un élément transversal de semelle.

Supposons que la semelle étudiée soit la semelle supérieure

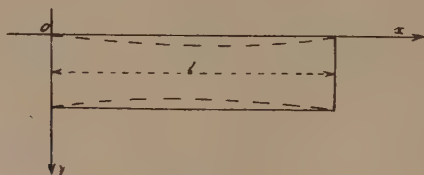


FIG. 46.

Etant donnée la constitution du contreplaqué, si e est son épaisseur, dans la flexion générale de la poutre seule une épaisseur de bois de $\frac{2e}{3}$ interviendra. Dans la flexion transversale des semelles, l'épaisseur dont on tiendra compte ne sera plus que de $\frac{e}{3}$.

Si l'élément transversal de semelle a une largeur égale à l'unité le moment en un point d'abscisse x est égal à :

$$M_t = \frac{fa}{3} x \cdot e (l - x).$$

Le travail moléculaire relatif à l'élément de semelle considéré et correspondant au moment précédent est donné par :

$$\frac{1}{2EI_t} \int_0^l M_t^2 dx$$

I_t étant le moment d'inertie d'un rectangle de base 1 mm. et mesurant $\frac{e}{3}$ de hauteur.

Pour calculer $\int_0^l M_t^2 dx$, calculons d'abord :

$$\int_0^l x^2 (l-x)^2 dx$$

on trouve aisément :

$$\int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = \frac{l^5}{30}$$

et

$$\int_0^l M_t^2 dx = \frac{l^5}{30} \cdot \frac{fa}{9} \cdot e^2$$

$$\frac{1}{2EI_t} \int_0^l M_t^2 dx = \frac{e^2 l^5 fa}{540 EI_t}.$$

Comme les deux semelles s'aplatissent de la même façon, le travail des forces élastiques, rapporté à l'unité de longueur de la poutre, est égal à :

$$\frac{M^2}{2EI} + \frac{e^2 f_a^2 l^5}{270 EI_t}.$$

La valeur de I_t est :

$$I_t = \frac{1}{12} \left(\frac{8}{3} \right)^3.$$

La relation

$$M_t = \frac{efa}{3} (x-l) x$$

nous donne :

$$\frac{efa}{3} \overline{750^3}$$

comme valeur du moment maximum dans un élément de semelle.

Si la fatigue correspondante est de 3 kgr., on a :

$$e fa = \frac{96}{9.750^2}$$

et

$$\frac{e^2 f_a l^5}{270 EI_t} \neq 5,5.$$

On trouve de même :

$$\frac{M^2}{2EI} \neq 3,5$$

par suite

$$\frac{M^2}{2EI} + \frac{e^2 f_a^2 l^5}{270 EI_t} = 9 \text{ environ}$$

Si l'aplatissement n'intervenait pas pour limiter la déformation de la poutre, le moment, que celle-ci pourrait encaisser, serait de :

$$96.10^5 \text{ kgrmm.}$$

La valeur de $\frac{M^2}{2EI}$ serait alors de 83 kgr.

b) La déformation de la semelle est analogue à celle représentée par le croquis ci-dessous :



FIG. 47.

Cette déformation correspond à des âmes extrêmement rigides.

En prenant les mêmes notations que dans le cas précédent, on a comme expression du moment transversal :

$$M_t = \frac{efa}{2} \left(x^2 - lx + \frac{l^2}{6} \right)$$

Le travail des forces élastiques correspondant est égal à :

$$\frac{1}{2 EI_t} \int_0^l M_t^2 dx$$

On trouve aisément que :

$$\frac{1}{2 EI_t} \int_0^l M_t^2 dx = \frac{e^2 f_a^2 l^5}{360 EI_t}$$

d'où pour l'ensemble des deux semelles :

$$\frac{2 e^2 f_a^2 l^5}{360 EI_t} = 7,7 \text{ kgrmm.}$$

et

$$\frac{M^2}{2EI} = 9 \text{ kgrmm.}$$

et

$$\frac{M^2}{2EI} + \frac{2 f_a^2 l^5}{360 EI_t} = 16 \text{ kgrmm. 7}$$

Nous voyons que, même aux efforts dynamiques, un pareil caisson est loin d'être aussi résistant qu'une poutre de section pleine et de même moment d'inertie.

Nous allons voir dans le chapitre suivant comment il est possible d'obtenir des caissons dont la résistance statique se trouve égale à celle d'une poutre de section pleine, et dont la résistance dynamique se trouve considérablement augmentée.



Caisson construit suivant le procédé Brodeau.

Ce procédé consiste essentiellement à réaliser des poutres creuses dont la paroi est constituée par un matériau composé de deux feuilles de bois simples ou contreplaqué collées de part et d'autre d'une feuille de liège. L'épaisseur du liège est déterminée par les conditions d'aplatissement.

Avant de calculer un caisson ayant les mêmes dimensions que le caisson précédent, mais dont les semelles seront construites suivant le procédé BRODEAU, nous allons décrire des expériences très simples destinées à nous fournir des indications indispensables sur le liège et réalisées au laboratoire de Bellevue.

1^{re} série d'essais.

Les essais portent sur une poutre de 980 mm. de long dont la section droite est figurée ci-dessous

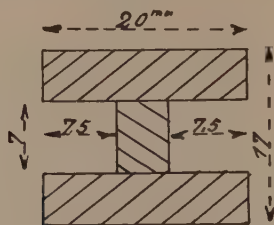


FIG. 48.

Les fibres du bois sont parallèles à la poutre.

La poutre est d'abord essayée en flexion simple à l'aide du dispositif représenté par notre croquis

Connaissant P , on calcule le moment fléchissant

$290 P$ en kgrmm.

On mesure la flèche de l'arc de cercle formé entre les appuis et on calcule le rayon de courbure correspondant.



FIG. 49.

Résultats :

P	M	f	ρ
5	1450	4	5000
6	1740	5	4000
7	2030	5,6	3636
10	2900	8	2500

On en déduit pour la poutre une valeur de $E I$ égale à :

$$7.250.000$$

avec le mm. et le kgr. comme unité.

La poutre est alors encastrée avec un porte à faux de 690 mm.

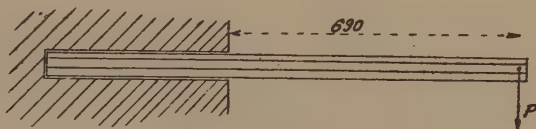


FIG. 50.

Les résultats obtenus sont les suivants :

P	M à l'encastrement	f
0,500	380	7
1	690	14
2	1380	28

L'équation de la ligne moyenne est, sans tenir compte de l'effort tranchant :

$$EI y'' = P (690-x)$$

avec des axes orientés suivant le croquis

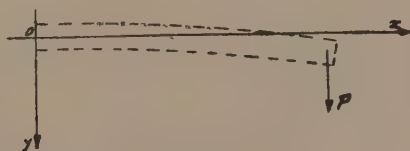


FIG. 51.

on a donc :

$$EI y' = 690 Px - \frac{Px^2}{2}$$

et

$$EI y = \frac{690 Px^2}{2} - \frac{Px^3}{6}$$

la flèche f est donc donnée par l'équation :

$$EI f = P \left[\frac{690^3}{2} - \frac{690^3}{6} \right]$$

pour

$$P = 1 \text{ kgr. et } EI = 7.250.000$$

on devrait avoir :

$$f = 15 \text{ mm.}$$

nous avons mesuré une flèche de 14 mm., il y a donc une légère erreur dans nos mesures, mais la précision est déjà très élevée pour des expériences de ce genre. On voit d'après l'essai que l'effort tranchant n'intervient pas de façon sensible dans la déformation.

2^e série d'essais.

Les deux essais précédents ont été repris, mais en remplaçant l'âme de bois par une âme de liège conformément à notre croquis

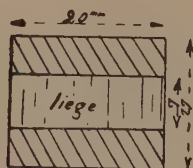


FIG. 52.

Les mêmes semelles sont utilisées et sont placées l'une par rapport à l'autre de la même façon. Le liège est collé à la caséine.

Pour la flexion simple, les résultats obtenus ont été les suivants :

P	M	f	ρ
5	1450	4	5000
6	1750	4,8	4000
7	2030	5,5	3636
10	2900	8	2500

La concordance entre ce tableau et le tableau correspondant obtenu précédemment montre bien que l'âme de bois qui existait lors du 1^{er} essai de flexion simple peut être négligée dans le calcul des flèches de flexion.

La poutre est alors encastrée de manière identique à celle de l'essai en porte à faux déjà réalisé sans la présence du liège.

On obtient les résultats suivants :

<i>P</i>	<i>M</i>	<i>f</i>
0,500	380	8,75
1	690	17,5
2	1380	35

La flèche, lorsqu'il y a de l'effort tranchant est donc augmenté de la façon suivante :

<i>P</i>	<i>M</i>	Augmentation de flèche
0,500	380	1,75
1	690	3,5
2	1380	7

Le coefficient de glissement *G* du liège est donc déterminé :

$$G = \frac{2 \times 690}{140 \times 7} = 1,4$$

c'est le coefficient de glissement le plus faible que nous connaissons. Nous savions déjà que le coefficient de POISSON du liège, ou plutôt du matériau, composé de liège et de cavités, constituant ce qu'on appelle le liège, est nul. Nous allons introduire le coefficient *G* dans le calcul du travail des forces élastiques d'une poutre caisson construite suivant le procédé BRODEAU.



Poutre caisson construite suivant le procédé Brodeau.

Nous prendrons les mêmes cotes que pour le caisson précédent mais la hauteur h sera prise en mesurant à partir du milieu du liège. Au lieu d'avoir un contreplaqué de 8 mm., nous prendrons deux contreplaqués de 4 mm. collés de part et d'autre d'une feuille de liège de 7 mm.

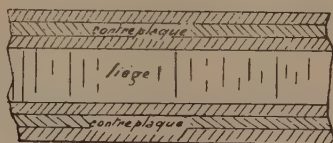


FIG. 53.

Le moment d'inertie intéressant, pour le calcul de la flexion transversale des semelles, sera, étant donné le sens des fibres de bois, celui calculé d'après le croquis suivant :

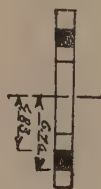


FIG. 54.

où les parties en noir interviennent seules.

On trouve facilement que la valeur de moment d'inertie I_1 est égal à :

$$I_1 = 80$$

Le moment d'inertie du caisson sera toujours considéré comme étant égal à :

$$55 \times 10^7$$

1^{er} Mode de déformation.

Le moment fléchissant maximum que peut encaisser la poutre de moment d'inertie I_1 est égal à :

$$\frac{3 \times 80}{6,16} = 38,9 \text{ kgr.}$$

ce moment correspond à une charge uniforme de :

$$\frac{38,9 \times 8}{1300^2} = 18 \times 10^{-5}$$

donc à une valeur de f_a égale à :

$$\frac{27}{8} \times 10^{-5}$$

Le travail des forces élastiques, dû à la flexion transversale des semelles, est donc égal à :

$$\frac{2 \times 18^2 \times 10^{-10} \times 1300^5}{60.000 \times 80} = 50 \text{ kgr.}$$

Comme on a :

$$f_a = \frac{M^2 h}{2 E I^2}$$

on a immédiatement :

$$\frac{M^2}{2 E I} = \frac{f_a I}{h} = 46 \text{ kgr.}$$

Le travail total des forces élastiques, rapporté à l'unité de longueur de la ligne moyenne, est donc égal à :

$$50 + 46 = 96 \text{ kgr.}$$

La poutre est moins résistante statiquement puisque la déformation, qui correspond à ce travail des forces élastiques, demanderait, pour être réalisée statiquement, un moment fléchissant de :

$$68 \times 10^5 \text{ kgr.}$$

au lieu de

$$83 \times 10^5 \text{ kgr.}$$

La résistance statique est légèrement diminuée par la construc-

tion en caisson BRODEAU, mais la résistance dynamique est nettement augmentée.

2^e Mode de déformation.

(voir figure 34)

Au moment fléchissant de 83×10^5 kgr. correspond une valeur de f_a donnée par :

$$f_a = \frac{M^2 h}{2 EI^2} = 4,3 \times 10^{-5}$$

le moment maximum que f_a détermine en flexion transversale est égal à :

$$32 \text{ kgr.}$$

la fatigue correspondante est :

$$\frac{32 \times 6,16}{80} = 3 \text{ kgr.}$$

Nous sommes dans le cas idéal pour les charges statiques où la fatigue transversale est égale à la fatigue de flexion de la poutre.

Le travail des forces élastiques dû à la flexion transversale des semelles est égal à :

$$\frac{2 \times 1,4 \times e^2 f_a^2 l^5}{288 \times EI_t} = 23,3 \text{ kgr.}$$

On a :

$$\frac{M^2}{2 EI} = 61 \text{ kgr.}$$

Le travail total des forces élastiques est donc égal à :

$$84 \text{ kgr.}$$

Remarques. — Nous avons négligé le rôle joué par l'effort tranchant dans le calcul du travail des forces élastiques dues à la flexion transversale.

Dans la poutre transversale avec âme en liège, que nous avons considérée, l'effort tranchant est donné par l'expression :

$$T_1 = e f_a \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

et

$$\int_0^l \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 dx = \frac{(1300)^2}{12}$$

et

$$\frac{1}{2 G \times 7} \int T_1^2 dx = 1,5$$

Comme il y a deux éléments semblables, le travail des forces élastiques est donc égal à :

$$3 \text{ kgr.}$$

Le travail total des forces élastiques est donc égal à :

$$84 + 3 = 87 \text{ kgr.}$$

alors qu'il serait de 61 kgr. pour une poutre ordinaire à semelles pleines et de même résistance statique.

La résistance dynamique se trouve multipliée par : $\frac{87}{61}$.

Dans le cas du premier mode de déformation, nous avons vu que la résistance statique était diminuée, mais que la résistance dynamique était encore plus nettement augmentée. Nous avons chiffré celle-ci sans tenir compte de l'effort tranchant agissant dans l'élément transversal. Un calcul simple nous donnerait comme valeur de celui-ci : 2,85.



Essais statiques et dynamiques d'une poutre Brodeau et d'un longeron en bois plein.

Nous avons procédé au Laboratoire de Bellevue à des essais comparatifs d'une poutre Brodeau et d'un longeron plein en bois.

Etant données d'une part la section de la poutre Brodeau, qui était elliptique, et d'autre part certaines erreurs de mesures provoquées par de mauvais encastremets des poutres, il serait vain de vouloir faire des calculs précis. Néanmoins, les phénomènes observés sont suffisamment nets pour prouver le gros avantage d'une poutre Brodeau sur une poutre classique.

La poutre Brodeau avait une section elliptique d'axes 300 et 100 mm. Elle était constituée par du liège de 4 mm. d'épaisseur et du contreplaqué de 1 mm.

Le longeron était en forme d'*I* et avait une hauteur égale à celle de la poutre. Sa résistance statique était nettement supérieure à celle de la poutre, mais des considérations n'ayant rien de commun avec nos essais nous avaient empêché de réduire sa résistance.

Poutre Brodeau et longeron avaient été encastres à une extrémité. La partie libre avait 1 m. 200 de large pour la poutre et le longeron. Une charge de 5 kgr. avait été placée successivement à l'extrémité libre du longeron puis de la poutre. On avait observé les flèches suivantes :

Poutre Brodeau

2 mm. 2

Longeron

1 mm. 65

Ces chiffres montrent bien que le longeron était nettement supérieur comme valeur de $\frac{I}{v}$ à la poutre Brodeau.

Le poids de 5 kgr. est ensuite tombé de la hauteur zéro, puis de 5 cm.

	Poutre Brodeau	Longeron
Hauteur de chute 0.....	2 mm. 3	2 mm.
Hauteur de chute 50 mm.	7 mm.	9 mm. 7

Pour une chute de 50 mm., on voit nettement que la poutre Brodeau est déjà supérieure au longeron.

Les essais ont été recommencés en utilisant un poids de 10 kgr. donnant à l'essai statique les flèches suivantes :

Poutre Brodeau	Longeron
6 mm.	3 mm. 3

Les hauteurs de chute zéro et 50 mm. ont donné :

	Poutre Brodeau	Longeron
Hauteur de chute 0.....	6 mm. 1	5 mm.
Hauteur de chute 50 mm.	14 mm. 7	16 mm. 7

En vérité, toutes les flèches dynamiques sont trop élevées, sauf la dernière. Les encastremements n'étaient pas suffisamment indéformables et on avait effectué un blocage complémentaire avant d'effectuer l'essai qui a donné la flèche de 16 mm. 7 sur le longeron.

Si l'on avait réduit les dimensions transversales du longeron, afin de réduire sa résistance sans diminuer sa hauteur, on aurait pu obtenir un longeron ayant la même résistance statique que la poutre Brodeau. Alors, à 7 mm. de flèche dynamique de la poutre Brodeau, correspondrait 13 mm. 4 pour le longeron. Chiffre bien supérieur à ce que nos calculs de caisson laissent prévoir. Nous avons calculé des poutres caissons car elles correspondent à des réalisations. Des ailes d'avion ont, en effet, été réalisées suivant notre croquis



FIG. 55.

La partie centrale réalise un caisson tel que celui que nous avons calculé. Si on supprime les éléments verticaux, d'ailleurs extrêmement faibles et sans continuité au point de vue transmission des efforts tranchants, on se rapproche d'une poutre sem-

blable à la poutre essayée à Bellevue. Celle-ci est plus difficile à calculer au point de vue effort dynamique, car on a transversalement des poutres en arcs, mais elle possède aussi une résistance plus grande, ainsi que le montrent les essais de Bellevue. Le calcul d'une poutre semblable nécessite des épures nombreuses et assez compliquées, c'est pourquoi nous avons choisi un exemple plus simple, mais correspondant quand même à une réalisation.



Application des forces d'aplatissement aux pièces chargées de bout.

Rappelons les résultats de l'étude des pièces chargées de bout.

Si la force sollicitant la pièce ne dépasse pas une certaine charge, appelée charge critique, et si on écarte la pièce de sa position d'équilibre rectiligne, elle reprend cette position dès que l'on cesse d'agir.

Si la force dépasse la charge critique, la pièce prend un état d'équilibre non rectiligne lorsqu'on l'écarte de sa position primitive rectiligne et qu'on cesse d'agir. Il se peut que l'état d'équilibre fléchi corresponde à une fatigue du matériau incompatible avec sa résistance, dans ce cas la pièce se rompt.

1° La charge ne dépasse pas la charge critique. Si l'on fléchit très peu la poutre, on a une fatigue se rapprochant autant qu'on le veut de la fatigue de compression simple.

La courbure est aussi petite que l'on veut et par suite les forces d'aplatissement sont aussi petites que l'on veut. Lorsqu'une pièce chargée de bout ne flambe pas, on ne voit donc pas apparaître de phénomène d'aplatissement.

2° La charge dépasse la charge critique. Dans ce cas, s'il n'y a pas rupture de la poutre par fatigues de flexion et de compression combinées, à l'état d'équilibre de la poutre correspond des forces d'aplatissement bien déterminées.

Il se peut alors que les forces d'aplatissement entraînent la rupture, exactement comme dans le cas de la flexion simple. On observe d'ailleurs dans le flambage des profilés minces, les mêmes phénomènes d'aplatissement que dans leur flexion. La rupture a lieu par exemple pour un profilé en *U* par ouverture des ailes de

l'*U*. Un double té voit ses ailes se rapprocher. Un tube mince s'aplatit comme un tuyau de caoutchouc que l'on fléchit exagérément.

En résumé. — Les forces d'aplatissement n'interviennent pas dans le calcul du flambage, mais elles expliquent la déformation des profilés minces qui flambent.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Origine et but de nos recherches.....	2
Les forces d'aplatissement en résistance des matériaux.....	5
Flexion, cisaillement, torsion.....	19
Application du calcul des forces d'aplatissement à des poutres de sections courantes.....	35
Effet dynamique des forces extérieures sur les poutres creuses.....	49
Caisson construit suivant le procédé Brodeau.....	58
Poutre caisson construite suivant le procédé Brodeau.....	62
Essais statiques et dynamiques d'une poutre Brodeau et d'un longeron en bois plein.....	66
Application des forces d'aplatissement aux pièces chargées de bout.....	69



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Théorie de Joukowski.

Vu et approuvé :

Paris, le 28 mars 1942.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Gilbert GIDEL.

